

RINKTINIAI MATEMATIKOS KLAUSIMAI



RINKTINIAI MATEMATIKOS KLAUSIMAI

FAKULTATYVINIS KURSAS VII—VIII KL.

Sudarė O. BOKOVNEVAS, S. ŠVARCBURDAS
Originalą redagavo V. FIRSOVAS



KAUNAS ŠVIESA 1982

51(075)
Ri-107

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ
факультативный курс, VII—VIII кл.
Авторы: *Н. Я. Виленкин, Р. С. Гутер, А. Н. Земляков, И. Л. Никольская*
Составители: *О. А. Боковнев, С. И. Шварцбурд*
Москва, «Просвещение», 1978

Vertė **Vidmantas Pekarskas**

Originalą rekomendavo TSRS švietimo ministerijos Vyriausioji mokyklų valdyba

Ri-107 **Rinktiniai** matematikos klausimai: Fakultatyvinis kursas VII—VIII kl./N. Vilenkinas, R. Guteris, A. Zemliakovas, I. Nikolskaja; Sudarė O. Bokovnevas, S. Švarcburdas; Orig. red. V. Firsovas.— K.: Šviesa, 1982.— 188 p., iliustr.

Knygoje pateikiama teorinė medžiaga, uždavinių ir pratimų visomis VII—VIII kl. matematikos fakultatyvinio kurso temomis.

51(075)

R $\frac{4306020400—122}{M 853(10)—82}$ 119—82

PRATARMĖ

Knyga skiriama vidurinės mokyklos 7—8 klasės fakultatyviniam kursui „Rinktiniai matematikos klausimai". Šis kursas įvedamas mokykloje vietoj anksčiau dėstyto kurso „Sistemingo matematikos kurso papildomi skyriai ir klausimai" dėl to, kad matematika jau dėstoma pagal naująją programą. Šios mokymo priemonės turinys atitinka fakultatyvinio kurso programą, kurią 1977 m. patvirtino TSRS švietimo ministerija.

„Rinktinių matematikos klausimų" tikslas — skatinti mokinių domėjimąsi matematika, ugdyti jų polinkius šiai disciplinai.

Kurso programą sudaro keli visai atskiri skyriai, todėl galima nagrinėti bet kurią fakultatyvo temą, nekreipiant dėmesio, ar kitos temos išnagrinėtos, ar ne. Fakultatyvinį kursą „Rinktiniai matematikos klausimai" ir VII, ir VIII klasėje galima pradėti dėstyti nuo bet kurios temos.

Kurias temas dėstyti — pasirenka mokytojas pagal galimybes ir mokinių poreikius. Bet vis dėlto VIII klasės fakultatyvo programoje jau yra išskirtos „pagrindinės" temos, kurias dėstyti reikia pirmiausia, ir „papildomos" temos, kurias mokytojas pasirenka pats. Todėl programoje pateikta temų daugiau negu jų reikia išnagrinėti dėstant kursą „Rinktiniai matematikos klausimai". Kurso programoje yra ypač svarbių matematiniu požiūriu klausimų, kurie pagilina pagrindines matematikos kurso kryptis. Kiekviena fakultatyvo tema susijusi su pagrindiniu kursu. Programa numato, kad bus siekiama dviejų tikslų: a) išdėstyti medžiagą taip, kad mokiniui būtų aiški jos principinė matematinė svarba ir kad ši medžiaga tam tikru laipsniu būtų užbaigta; b) parodyti, kad vidurinės mokyklos matematika yra rimtas mokslas, kaip ir kur jis taikomas. Numatoma per užsiėmimus paaiškinti, kaip atsirado ir plėtojosi nagrinėjami metodai, koncepcijos ir idėjos, kokia jų reikšmė matematikai ir kitiems mokslams bei praktinei veiklai.

Fakultatyvo turinys jokiu būdu nedubliuoja aukštosios mokyklos programų, tik leidžia iš bendresnių pozicijų pažvelgti į vidurinės mokyklos matematiką, taip pat įžvelgti dalyko ir matematikos mokslo metodo vieningumą. Todėl svarbu, kad fakultatyviniuose užsiėmimuose nebūtų nagrinėjami tie specialūs metodai, būdai ir įgūdžiai, kurių mokoma aukštosiose mokyklose; svarbu parodyti mokiniams, kaip iš mokyklinio matematikos kurso atsiranda bendros koncepcijos, turinčios teorinę ir taikomąją vertę.

Per fakultatyvinius užsiėmimus daug dėmesio reikia skirti uždavinių sprendimui. Numatoma, kad, išnagrinėjus kiekvieną temą, bus sprendžiama daug uždavinių, kurių gausu šioje mokymo priemonėje. Skaitytojas pamatys, kad tarp jų yra daug beveik tradicinių mokyklinių uždavinių: įrodymo uždaviniai temoje „Simetri-

ja“, lygtys ir nelygybės temoje „Matematinės logikos elementai“, funkcijų ir lygčių su dviem kintamaisiais grafikai temoje „Koordinačių plokštumos aibės“ ir pan.

Be to, fakultatyvo programa numato, kad būtinai bus skirtas laikas spręsti sunkesniems uždaviniams iš bendrojo matematikos kurso. Taigi bendrojo kurso uždavinius siūloma spręsti ne tik nagrinėjant fakultatyvo temas, bet ir per specialius užsiėmimus, skirtus uždaviniams spręsti ir aptarti.

Į šią knygą įtraukta medžiaga neapima visų fakultatyvinio kurso „Rinktiniai matematikos klausimai“ programos skyrių. Sudarytojai visų pirma stengėsi įtraukti naują, mokytojui mažiau žinomą medžiagą. Todėl, pavyzdžiui, knygoje nėra temos „Dalumas ir pirminiai skaičiai“, kurios turinį mokytojas gerai žino iš V. Boltianskio ir G. Levitaso straipsnio, atspausdinto rinkinyje „Papildomi matematikos fakultatyvinio kurso skyriai VII—VIII klasei“ (M., „Prosveščenije“, 1974, rusų k.).

Temos „Loginė geometrijos struktūra“ medžiaga išdėstyta mokymo priemonėje „Geometrija VIII klasei“. Iš papildomų į šią knygą neįtrauktos temos „Grafų teorijos taikymai“ bei „Algoritmai ir programavimas“. Tačiau „Prosveščenije“ ir „Šviesos“ leidykla išleido ir tebeleidžia knygas, kuriose šios temos išnagrinėtos.

Kadangi leidykla „Prosveščenije“ serijose „Mokyklos metodinė biblioteka“ ir „Matematikos mokytojo biblioteka“ ketina išleisti algebros ir geometrijos uždavinynus, šioje knygoje nėra skyrių, skirtų sunkesniems uždaviniams, kurių turinį mokytojas parinks pats. Kartu leidykla „Prosveščenije“ planuoja išleisti atitinkamas brošiūras su rekomenduojamų uždavinių sąlygomis. Tačiau net ir tada mokytojas parinks, kokius uždavinius spręsti klasėje, nes jis pažįsta savo mokinius, žino, koks jų matematinis pasirengimas.

Šioje knygoje yra skyrelių, kurių mokytis visiems mokiniams nereikia (šie skyreliai pažymėti žvaigždute). Jie skirti savarankiškam skaitymui, referatams bei pranešimams rengti ir pan. Taip pat manoma, kad ne visi uždaviniai, esantys knygoje, bus sprendžiami (sunkiausi jų pažymėti žvaigždute). Autoriai metodiniais sumetimais sąmoningai pateikė daugiau uždavinių: mokytojas galės individualizuoti mokymą, savarankišką mokinių darbą, sprendžiant uždavinius.

Rengiamasi išleisti metodinę priemonę mokytojams, kurioje detaliau bus nagrinėjami dėstymo metodikos klausimai. Toje priemonėje bus pateikti uždavinių ir pratimų atsakymai, o šioje knygoje duodami tik rinktinių uždavinių sprendimai ir nurodymai. Be to, metodinėje priemonėje bus pateikti užsiėmimų pavyzdiniai planai.

Rengiant šią knygą, autoriams ir redaktoriams daug padėjo A. Kolmogorovo, F. Barčiunovos, A. Michailovskajos, K. Muravino ir V. Ščenikovo patarimai bei pastabos. Jiems dėkojame.

SKAIČIAVIMO SISTEMOS IR ELEKTRONINIŲ SKAIČIAVIMO MAŠINŲ ARITMETINIAI PAGRINDAI

1. Nepozicinės ir pozicinės skaičiavimo sistemos. Skaičiavimo sistema vadinamas skaičių išvardijimo ir užrašymo būdas. Naudojamos skaičiavimo sistemos skirstomos į pozicines ir nepozicines. Pirmiausia susipažinsime su nepozicinėmis skaičiavimo sistemomis, apsiribodami kol kas natūriniais, t. y. sveikais teigiamais skaičiais.

Iš pradžių natūriniai skaičiai buvo vaizduojami brūkšneliais arba lazdelėmis. Vėliau pradėta juos vaizduoti raidėmis arba specialiais ženklais.

Nepozicinės skaičiavimo sistemos pavyzdys — iš Senovės Romos išlikusi romėniškoji sistema, kurioje skaičiai vaizduojami lotyniškosios abėcėlės raidėmis. Senovės Novgorode buvo vartojama slaviškoji sistema, kurioje skaičiai buvo žymimi slavų abėcėlės raidėmis; vaizduojant skaičius, virš jų buvo rašomas ženklas ~ (titlas).

Romėniškajai skaičiavimo sistemai būdinga tai, kad tam tikros raidės visada reiškia tuos pačius skaičius. Pavyzdžiui, raidė I visada reiškia vienetą, raidė V — penkis, X — dešimt, L — penkiasdešimt, C — šimtą, D — penkis šimtus, M — tūkstantį. Pavyzdžiui, skaičius 1678 romėniškoje sistemoje rašomas taip: MDCLXXVIII. Iš šio pavyzdžio aišku, kad greta parašytų raidžių reikšmės, vaizduojant skaičių raidėmis, sudedamos. Beje, norint sumažinti reikiamų ženklų skaičių, romėniškoje sistemoje buvo įvesta papildoma taisyklė: mažesnio skaičiaus užrašymas į kairę nuo didesniojo reiškia atimtį, o ne sudėtį; pavyzdžiui, IV reiškia keturis, IX — devynis, XL — keturiasdešimt ir t. t.

Slaviškoje numeracijos sistemoje skaičiams užrašyti buvo vartojamos visos abėcėlės raidės, tiesa, šiek tiek suardžius abėcėlės tvarką. Skirtingos raidės reiškė skirtingą vienetų, dešimčių ir šimtų kiekį. Pavyzdžiui, skaičius 231 slaviškoje sistemoje būdavo užrašomas taip: С̃ЛА (С reiškė du šimtus, Л — trisdešimt, А — vienetą, o titlą galima būdavo žymėti tik virš vienos raidės). Tūkstančiai buvo žymimi tomis pačiomis raidėmis, bet priekyje dar buvo rašomas ženklas ҂ .

Nepozicinės sistemos turi du trūkumus, dėl kurių jas išstūmė pozicinės: reikia daug įvairių ženklų, ypač vaizduojant didelius skaičius, ir, kas dar svarbiau, nepatogu atlikti aritmetinius veiksmus. Kad taip yra iš tiesų, skaitytojas nesunkiai įsitikins pats, pabandęs sudauginti skaičius CCLXIII ir DCXLIV, naudodamasis romėniškąja skaičiavimo sistema. Todėl romėniškoji sistema šiandien naudojama tik tada, kai turime reikalą su nedideliais

skaičiais, su kuriais nereikia atlikti aritmetinių veiksmų, pavyzdžiui, numeruojant knygos dalis arba skyrius, šimtmečius ir pan.

Visuotinai priimta ir labiausiai paplitusi yra *dešimtainė pozicinė skaičiavimo sistema,* kuri buvo atrasta Indijoje. Iš indų ją pasiskolino arabai. Vėliau per Artimųjų Rytų, Vidurinės Azijos ir Šiaurės Afrikos šalis ji atkeliavo į Europą. Šioje, kaip ir bet kurioje kitoje pozicinėje skaičiavimo sistemoje, kiekvieno skaitmens reikšmė apibrėžiama juo pačiu ir vieta (pozicija) skaičiaus užraše.

Pavyzdžiui, skaitmuo 1 reiškia vienetą. Tą patį vienetą jis reiškia ir skaičiuje 231, ir skaičiuje 0001[1], nes visais atvejais skaitmuo 1 yra pirmas iš dešinės. Bet jau skaičiuje 12 skaitmuo 1 reiškia ne vienetą, o dešimt; perkeltas į trečią vietą, skaičiuje 100 jis jau reiškia šimtą.

Kiekvienai pozicinei sistemai būdinga tai, kad skaičius joje išreiškiamas skyriaus vienetų suma ir bet kuris skaitmuo reiškia atitinkamą to skyriaus, kuriame yra šis skaitmuo, vienetų kiekį. Taigi užrašas 231 reiškia, kad skaičių sudaro du šimtai, trys dešimtys ir vienas vienetas: $231=100+100+10+10+10+1$.

Gretimų skyrių vienetai vienas su kitu sudaro tam tikrą pastovų santykį. Šis santykis vadinamas skaičiavimo sistemos *pagrindu.* Mūsų sistemos pagrindas yra skaičius dešimt, todėl ji ir vadinama *dešimtaine.* Skaičiaus užrašas dešimtainėje skaičiavimo sistemoje reiškia, kad šis skaičius yra išreikštas dešimčių sveikųjų laipsnių, paimtų su tam tikrais koeficientais, suma. Pavyzdžiui, užrašas 243 078 dešimtainėje sistemoje reiškia lygybę

$$243\,078=2\cdot 10^5+4\cdot 10^4+3\cdot 10^3+0\cdot 10^2+7\cdot 10^1+8\cdot 10^0.$$

Šios lygybės dešinioji pusė savo išraiška primena daugianario standartinę išraišką. Pažymėję pagrindą 10 kuria nors raide, pavyzdžiui d, galėsime parašyti

$$243\,078=2d^5+4d^4+3d^3+0d^2+7d+8.$$

Skaičiaus užrašas, kokį vartojame, yra sutrumpintas šio daugianario užrašas: užrašomi tik jo koeficientai. Pagrindo, atitinkančio duotąjį koeficientą, laipsnis apibrėžiamas to koeficiento vieta. Todėl, pavyzdžiui, reikia rašyti nulius, kad kiekvienas koeficientas būtų reikiamoje vietoje.

Daugiaženklių skaičių sudėtis pozicinėje skaičiavimo sistemoje pakeičiama vienaženklių skaičių sudėtimi; jeigu reikia, perkėlimu iš žemesniojo skyriaus į aukštesnįjį. Pavyzdžiui, išnagrinėkime sudėtį:

$$\begin{array}{r} 732\,514 \\ +\;\; 63\,982 \\ \hline 796\,496 \end{array}$$

[1] Sveikieji skaičiai su nuliais priekyje rašomi tada, kai skaičiui pavaizduoti skiriamas tam tikras kiekis skyrių. Taip atrodo skaitiklių parodymai, popierinių pinigų, tramvajaus, autobuso bilietų, loterijos bilietų numeriai ir pan.

Sudėdami atskirai dėmenų vienetus ir dešimtis, išsyk gauname sumos vienetų ir dešimčių skaitmenis: 4+2=6; 1+8=9. Sudėdami šimtus, gauname 5+9=14. Bet 14 šimtų — tai keturi šimtai ir vienas aukštesniojo skyriaus vienetas — tūkstantis. Todėl „rašome keturis ir vieną turim mintyje“. Į šį vienetą „mintyse“ atsižvelgiama, sudedant sekančiame skyriuje.

Tos pačios taisyklės paklūsta ir daugiaženklių skaičių atimčiai; skirtumas tik toks, kad šį kartą gali tekti perkelti iš aukštesniojo skyriaus į žemesnįjį, jei kurio nors skyriaus turinys yra mažesnis už atėminį.

Daugiaženklių skaičių dauginimas „stulpeliu“ irgi galų gale pakeičiamas vienaženklių skaičių dauginimu ir po to einančia sudėtimi. Tačiau čia yra daug tarpinių etapų, todėl šį veiksmą išnagrinėsime detaliau.

Visų pirma, dauginimas iš daugiaženklio skaičiaus pakeičiamas dauginimu iš vienaženklio ir iš „apvalių“ skaičių (rašomų vienu skaitmeniu ir nuliais). Pavyzdžiui, norėdami kokį nors skaičių padauginti iš 2 375, turime jį padauginti iš 5, iš 70, iš 300 ir iš 2 000. Norint skaičių padauginti iš „apvalaus“ skaičiaus, pakanka jį padauginti iš vienaženklio ir iš dešinės prirašyti kiek reikia nulių. (Daugindami „stulpeliu“, šių nulių nerašome, o tik perstumiame sandaugą per atitinkamą skyrių skaičių į kairę.) Taigi daugiaženklio skaičiaus dauginimas iš daugiaženklio pakeičiamas jo dauginimu iš kelių vienaženklių.

Daugiaženklio skaičiaus dauginimas iš vienaženklio savo ruožtu pakeičiamas vienaženklio skaičiaus ir kelių apvaliųjų skaičių dauginimu iš šio vienaženklio skaičiaus; pavyzdžiui, daugindami 684 iš kokio nors skaičiaus, turime padauginti iš to skaičiaus 4, paskui 80 ir 600. Galų gale gauname, kad reikia sudauginti tik vienaženklius skaičius. Todėl labai svarbi yra žinomoji daugybos lentelė, kurioje surašytos visos įmanomos, paimtų poromis, vienaženklių skaičių sandaugos.

2. Pozicinės sistemos, kurių pagrindas bet koks. Skaičiavimo sistemos pagrindu gali būti bet koks natūrinis skaičius.

Pavyzdžiui, Senovės Babilone buvo vartojama *šešiasdešimtainė* skaičiavimo sistema. Jos liekanų yra ir šiandien, pavyzdžiui, valandą arba laipsnį dalome į 60 minučių, o minutę — į 60 sekundžių.

Senovėje plačiai buvo paplitusi ir *dvyliktainė* sistema, kurios, kaip ir dešimtainės, atsiradimas galbūt siejamas su skaičiavimu pirštais: skaičiavimo vienetu buvo laikomi vienos rankos keturių pirštų pirštikauliai (atskiri sąnariai), kurie skaičiuojant būdavo paliečiami tos pačios rankos nykščiu. Dvyliktainės skaičiavimo sistemos liekanų išliko net iki šiol kalboje ir papročiuose. Pavyzdžiui, gerai žinomas dvyliktainės skaičiavimo sistemos antrojo skyriaus vieneto — skaičiaus dvylika — pavadinimas: tuzinas. Išliko paprotys daugelį daiktų skaičiuoti ne dešimtimis, bet

tuzinais, pavyzdžiui, servizo indus arba baldų komplekto kėdes (prisiminkite I. Ilfo ir E. Petrovo „Dvylika kėdžių“).

Dvyliktainės sistemos trečiojo skyriaus vieneto pavadinimas — grosas — šiandien pasitaiko retai, bet jis buvo vartojamas šio šimtmečio pradžioje ir dar prieš penkiasdešimt metų jis buvo gana dažnas. Pavyzdžiui, V. Majakovskis eilėraštyje „Pliuškinas“, parašytame 1928 m., išjuokia miesčionis, superkančius paeiliui viską, ko reikia ir ko nereikia:

„...nusipirko
dvylika grosų
dirigento lazdelių“.

Kai kurios Afrikos gentys ir Senovės Kinijos gyventojai vartojo *penketainę* skaičiavimo sistemą. *Dvidešimtainė* sistema buvo paplitusi Centrinėje Amerikoje tarp senovės actekų ir majų, taip pat ir tarp keltų, gyvenusių Vakarų Europoje. Visos jos taip pat susijusios su skaičiavimu pirštais.

Bet kokios pozicinės skaičiavimo sistemos pagrindas yra užrašomas kaip 10, nes tai antrojo skyriaus vienetas. Visi natūriniai skaičiai, mažesni už pagrindą, yra vienaženkliai ir turi būti užrašomi skirtingais ženklais. Todėl **skaitmenų, vartojamų tam tikroje pozicinėje sistemoje, skaičius sutampa su sistemos pagrindu.** Kitaip tariant, pozicinėje sistemoje, kurios pagrindas n, turi būti n skirtingų skaitmenų. Iš tikrųjų, natūrinių skaičių, mažesnių už n, yra $n-1$. Be to, dar reikia ženklo, kuriuo vaizduojamas nulis.

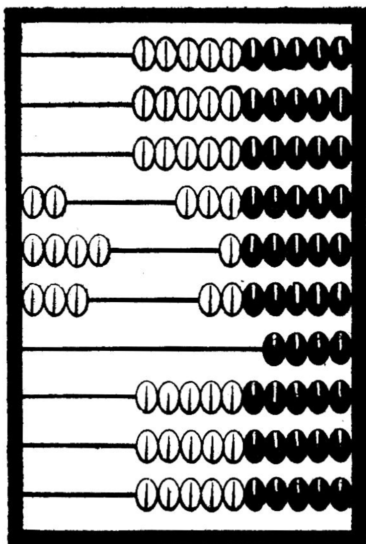
Skaičiavimo sistemose, kurių pagrindas yra mažesnis už 10, galima vartoti tuos pačius skaitmenis, kaip ir dešimtainėje sistemoje. Tačiau tada reikia nurodyti, kurioje sistemoje yra parašytas skaičius. Skaičiavimo sistemos pagrindą sutarsime rašyti smulkiu šriftu šiek tiek žemiau skaičiaus ir į dešinę nuo jo, panašiai, kaip rašomas indeksas. Pats pagrindas visada užrašomas dešimtaine sistema.

Pavyzdžiui, pozicinėje sistemoje, kurios pagrindas *septyni*, reikia septynių skaitmenų: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Skaičius septyni, kuris yra sistemos pagrindas, užrašomas taip: 10_7. Skaičius 10 septynetainėje sistemoje turės išraišką 13, o dešimtainis skaičius 49, lygus pagrindo kvadratui, jau bus užrašomas taip: 100_7.

Dvyliktainėje sistemoje jau reikės dvylikos skaitmenų. Galime pavartoti dešimtainės sistemos skaitmenis, bet be jų dar reikia dviejų skaitmenų — skaičiams dešimt ir vienuolika pažymėti; pastarieji šį kartą yra vienaženkliai, nes jie mažesni už pagrindą. Pažymėję juos, tarkime, simboliais $\overline{0}$ ir $\overline{1}$, turėsime visą dvylikos skaitmenų komplektą, todėl dabar jau galėsime bet kurį sveiką skaičių parašyti dvyliktaine sistema, pavyzdžiui: $17_{10} = 15_{12}$, $22_{10} = 1\overline{0}_{12}$.

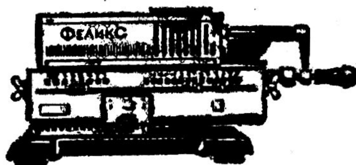
Pozicinės sistemos, kurių pagrindai yra skirtingi, vartojamos sveikųjų skaičių savybėms nagrinėti, pavyzdžiui, sudarant dalu-

mo požymius. Tačiau nedešimtainės skaičiavimo sistemos vartojamos ir kitur. Pasirodo, kad skaitmeninių skaičiavimo mašinų konstravimo problemos glaudžiai susijusios su pasirinktąja skaičiavimo sistema. Išnagrinėkime šį klausimą detaliau. Paprasčiausias skaitmeninis skaičiavimo įrenginys — žinomi rusiškieji skaitytuvai (1 pav.). Juose skaičius vaizduojamas užmautais ant virbo kauliukais. Kiekvienas virbas atitinka skaičiaus skyrių, ir skaitmuo šiame skyriuje apibrėžiamas perstumtų kauliukų skaičiumi. Dešimtainei sistemai reikia dešimties skirtingų skaitmenų, vadinasi, virbas turi turėti dešimt skirtingų būvių, todėl ant jo užmaunama dešimt kauliukų.



1 pav.

Kitas skaitmeninės skaičiavimo mašinos pavyzdys — aritmometras (2 pav.). Skirtingiems kiekvieno skyriaus skaitmenims pavaizduoti jame yra dantratis, turintis dešimt dantų. Sukdamasis apie savo ašį, jis gali sustoti tik tada, kai koks nors dantis, ant kurio parašytas atitinkamas skaitmuo, yra prieš langelį, esantį aritmometro korpuse.

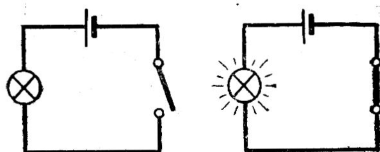


2 pav.

Kai kuriose skaičiavimo mašinose skaičiai pavaizduojami specialiais laiptuotais velenėliais; kiekviename velenėlyje yra dešimt laiptelių.

Taigi **pozicinė skaičiavimo sistema, kurią parinkome skaičiams užrašyti, turi savo reikalavimus skaičiavimo mašinų bei įrenginių konstrukcijai.** Norint skaičių pavaizduoti dešimtainėje skaičiavimo sistemoje, turinčioje dešimt skirtingų skaitmenų, reikia pavartoti elementus, kurių kiekvienas turi dešimt skirtingų, stabilių padėčių. Todėl ant skaitytuvų virbo užmaunama dešimt kauliukų, aritmometro ratas padaromas su dešimčia dantų, o laiptuotas velenėlis — su dešimčia laiptelių.

Beje, kol susiduriame su aprašytais mechaniniais elementais arba su analogiško tipo elementais, patenkinti skaičiavimo sistemos reikalavimus nesunku. Iš tiesų, juk be jokio vargo galime ant virbo užmauti aštuonis arba dvylika kauliukų, kaip to reikalauja aštuonetainė arba dvyliktainė skaičiavimo sistema, arba



3 pav.

padaryti reikiamą dantų skaičių dantratyje, arba laiptelių skaičių velenėlyje.

Visai kitaip bus, kai turėsime reikalą su visai kito tipo elementais — elektromechaniniais arba elektroniniais. Žinia, ir šį kartą galėtume pritaikyti dešimtainę skaičiavimo sistemą, vaizduodami skaitmenį, pavyzdžiui, tam tikru kiekiu elektros impulsų, siunčiamų laidininku, arba vienu impulsu, siunčiamu kuriuo nors vienu iš dešimties laidininkų, skirtų tam tikram skyriui. Galima sukonstruoti ir kitokių elementų, turinčių dešimt skirtingų būvių. Tačiau elektromechaniniams arba elektroniniams elementams paprastai būdingos ir skirtingos natūralios stabilios padėtys. Pavyzdžiui, jungiklis arba elektromechaninė relė gali būti įjungti arba išjungti (3 pav.), kondensatorius — pakrautas arba nepakrautas, elektroninė lempa arba puslaidininkinis triodas — praleisti arba nepraleisti srovės.

Tokių elementų pritaikymas skaičiavimo mašinose yra ypač parankus tada, kai jų nereikia kombinuoti vieno su kitu, norint sukurti elementus, turinčius daugiau padėčių, t. y., kai juos galima naudoti tiesiogiai. Todėl reikia vartoti skaičiavimo sistemą tik su dviem skirtingais skaitmenimis. Tokia yra pozicinė skaičiavimo sistema, kurios pagrindas lygus dviem. Ji vadinama *dvejetaine* sistema.

Dvejetainė sistema, be paminėtųjų, turi dar kelias svarbias savybes, dėl to ją labai paranku pritaikyti skaičiavimo mašinose. Dvejetainė sistema nagrinėjama atskirame skyrelyje. Bet prieš tai detaliau susipažinsime su aritmetinėmis operacijomis pozicinėse skaičiavimo sistemose, sužinosime, kaip skaičiai, parašyti vienoje sistemoje, yra išreiškiami kitoje. Tai išnagrinėsime vėliau.

Pratimai

1. Skaičius 10_5, 100_5, 1000_5, 10000_5 išreikškite dešimtainėje sistemoje.

2. Kaip dvyliktainėje sistemoje užrašomas tuzinas, grosas ir tuzinas grosų?

3. Kurioje skaičiavimo sistemoje teisinga lygybė $10 \cdot 10 = 100$? $3+5=10$?

4. Ar yra skaičiavimo sistema, kurioje tuo pačiu metu $4+5=10$ ir $4\times5=22$? $2+3=5$ ir $2\times3=11$? $3+4=7$ ir $3\times4=11$?

5. Visus skaičius, kurie užrašomi vienu skaitmeniu ir keliais (galbūt ir vienu) nuliais, vadinkime apvaliaisiais. Parašykite visus penketainės ir septynetainės skaičiavimo sistemos dviženklius ir

triženklius apvaliuosius skaičius ir išreikškite juos dešimtainėje sistemoje.

6. Kokią savybę turi turėti dešimtainis skaičius, kad, išreikštas šešetainėje skaičiavimo sistemoje, jis būtų apvalus?

7*. Atsakykite į 6 klausimą, kai vietoje šešetainės sistemos vartojama pozicinė sistema, kurios pagrindas yra bet koks natūrinis skaičius n.

8. Kaip pagal skaičių užrašą trejetainėje skaičiavimo sistemoje atskirti lyginį skaičių nuo nelyginio?

9*. Suformuluokite sąlygą, pagal kurią iš skaičiaus užrašo skaičiavimo sistemoje su pagrindu n galima būtų nustatyti, koks jis — lyginis ar nelyginis?

3. Aritmetiniai veiksmai pozicinėse skaičiavimo sistemose. Natūrinių skaičių, parašytų vienoje sistemoje, reiškimas kitoje sistemoje. Aritmetiniai veiksmai bet kokioje pozicinėje skaičiavimo sistemoje pakeičiami veiksmais su vienaženkliais skaičiais lygiai taip pat, kaip ir dešimtainėje sistemoje. Išnagrinėkime, pavyzdžiui, keturženklių skaičių $2\,514_8$ ir $3\,621_8$ sudėtį aštuonetainėje sistemoje, parašę juos įprastu stulpeliu:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 2\,514 \\ 3\,621 \end{array} \\ \hline 6\,335 \end{array}$$

Sudėdami dviejų žemesnių skyrių vienetus, išsyk gauname $4+1=5$ ir $1+2=3$. Trečiojo skyriaus suma jau išeina už šio skyriaus ribų. Aštuonetainėje sistemoje $5_8+6_8=13_8$, todėl šiame skyriuje lieka 3, o 1 perkeliamas į aukštesnį skyrių. Taigi, norėdami išmokti sudėti (ir atimti) aštuonetainėje sistemoje, turime mokėti *sudėties lentelę*, kurioje surašytos vienaženklių skaičių visų įmanomų porų sumos. Skaitytojas nesunkiai sudarys ją pats, pavyzdžiui, sudėdamas atitinkamus skaičius dešimtainėje sistemoje ir paskui sumą išreikšdamas aštuonetainėje sistemoje. Atimtį užtenka paaiškinti pavyzdžiu:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 6\,314 \\ 2\,531 \end{array} \\ \hline 3\,563 \end{array}$$

Tokios pat taisyklės galioja bet kokioje pozicinėje skaičiavimo sistemoje, tik „sudėties lentelė" kiekvieną kartą atrodo kitaip. Pavyzdžiui, dvyliktainėje sistemoje $267+5\bar{0}4=84\bar{1}$ ir $936-568=$ $=38\bar{0}$ (tikrindami šiuos apskaičiavimus, prisiminkite simbolių $\bar{0}$ ir $\bar{1}$, nagrinėtų 2 skyrelyje, prasmę).

Dauginant, aišku, reikia mokėti daugybos lentelę atitinkamoje skaičiavimo sistemoje. Šioje lentelėje surašytos vienaženklių skaičių sandaugos. Skirtingose sistemose šios sandaugos yra skirtingos, nors dauginami tie patys skaičiai. Pavyzdžiui, sandauga 3×5 yra apibrėžtas, vienintelis skaičius, kurį vienareikšmiškai

apibrėžia dauginamieji, ir ji nuo nieko daugiau nepriklauso. Bet šis skaičius skirtingose skaičiavimo sistemose užrašomas skirtingais skaitmenimis; pavyzdžiui, dešimtainėje skaičiavimo sistemoje $3\times5=15$, tuo tarpu aštuonetainėje $3\times5=17$, o dvyliktainėje $3\times5=13$. Ir vis dėlto kiekvieną kartą kalbama apie tą patį skaičių, nes $17_8=15_{10}=13_{12}$.

Daugybos lentelę sudaryti nesunku, ir tai siūlome padaryti skaitytojams. Kaip pavyzdį, kuris padės pasitikrinti, ar nesuklydote, pateikiame daugybos lentelės aštuonetainėje sistemoje du stulpelius:

$5\times1=5$	$6\times1=6$
$5\times2=12$	$6\times2=14$
$5\times3=17$	$6\times3=22$
$5\times4=24$	$6\times4=30$
$5\times5=31$	$6\times5=36$
$5\times6=36$	$6\times6=44$
$5\times7=43$	$6\times7=52$

Remdamiesi daugybos lentele (aišku, visa), galėsime dauginti ir dalyti daugiaženklius skaičius, parašytus aštuonetainėje sistemoje. Pateikiame du pavyzdžius.

```
×  42 307         732122 | 156
      615         670    |------
---------         ----     4 237
   253743          421
   42307           334
  316252           ----
---------          652
 32524233          512
                   ----
                   1402
                   1402
                   ----
                      0
```

Dabar išnagrinėkime, kaip natūriniai skaičiai, parašyti vienoje skaičiavimo sistemoje, *reiškiami* kitoje sistemoje. Jau minėjome, kad, užrašydami skaičių dešimtainėje sistemoje, jį išreiškiame kelių dėmenų suma; kiekvienas dėmuo lygus koeficientui, padaugintam iš dešimties laipsnio. Šie koeficientai ir yra skaičiaus skaitmenys.

Tuo galima remtis, kai reikia sveiką skaičių, parašytą nedešimtainėje pozicinėje sistemoje, išreikšti dešimtainėje sistemoje. Tarkime, pavyzdžiui, kad duotas aštuonetainis skaičius 3 564. Šis užrašas reiškia, kad skaičius išreiškiamas suma:

$$3\,564_8=3\times10_8^3+5\times10_8^2+6\times10_8^1+4\times10_8^0.$$

Bet $10_8=8_{10}$, todėl šią lygybę galima parašyti, vartojant dešimtainius skaičius:

$$3\,564_8=3\times8^3+5\times8^2+6\times8+4=1\,536_{10}+320_{10}+48_{10}+$$
$$+4=1\,908_{10}.$$

Analogiškai galime daryti, kai reikia skaičių, parašytą bet kurioje nedešimtainėje sistemoje, išreikšti dešimtainėje, pavyzdžiui:

$$23\,401_5=2\times5^4+3\times5^3+4\times5^2+0\times5^1+1\times5^0=1\,726_{10}.$$

Samprotaudami taip pat, galime skaičius, parašytus dešimtainėje sistemoje, išreikšti bet kurioje nedešimtainėje. Pavyzdžiui, dešimtainį skaičių 2 937 pabandykime išreikšti aštuonetainėje sistemoje. Žinome, kad

$$2\,937=2\times10^3+9\times10^2+3\times10^1+7\times10^0.$$

Kadangi $10_{10}=12_8$ ir $9_{10}=11_8$, tai

$$2\,937_{10}=2\times12_8^3+11_8\times12_8^2+3\times12_8+7=2\times1\,750_8+11_8\times$$
$$\times144_8+3\times12_8+7=5\,571_8.$$

Šis būdas turi vieną esminį trūkumą: norėdami skaičių, užrašytą dešimtainėje sistemoje, išreikšti aštuonetainėje sistemoje, turėjome joje atlikti aritmetines operacijas; tai mažiau įprasta negu dešimtainėje.

Galima pasiūlyti kitokį būdą, pagrįstą parinkimu ir operacijomis dešimtainėje sistemoje. Palyginkime skaičių $2\,937_{10}$ su įvairiais naujojo pagrindo laipsniais: $8^2=64$, $8^3=512$, $8^4=4\,096$. Kadangi $2\,937<8^4$, tai aišku, kad duotasis skaičius negali turėti skaičiaus 8 laipsnio, aukštesnio už 8^3. Nesunku patikrinti, kad

$$2\,937=5\times8^3+377$$

(daugiklį 5 randame, palyginę skaičių 2 937 su skaičiais, kartotiniais 512, arba padaliję duotąjį skaičių iš 512).

Lygiai taip pat gauname, kad $377=5\times8^2+57$, todėl

$$2\,937=5\times8^3+5\times8^2+57,$$

arba, pagaliau

$$2\,937=5\times8^3+5\times8^2+7\times8^1+1,$$

o tai ir yra skaičiaus aštuonetainė išraiška $5\,571_8$.

Apskaičiuojant kitu būdu, pagrįstu praktiškai ta pačia idėja, galima išvengti parinkimo, kai iš anksto reikia apskaičiuoti pagrindo laipsnius. Išnagrinėkime vėl tą patį skaičių 2 937 ir padalykime jį iš naujo pagrindo 8. Gausime dalmenį 367 ir liekaną 1, t. y.

$$2\,937=367\times8+1.$$

Ši lygybė rodo, kad duotasis skaičius susideda ne tik iš tam tikro sveiko kiekio sistemos pagrindų (aštuonetų), bet jis turi dar ir vieną vienetą; vadinasi, skaičiaus užrašo aštuonetainėje sistemoje paskutinis skaitmuo yra 1. Norėdami surasti kitą (antrą iš dešinės) skaitmenį, gautą dalmenį 367 vėl dalijame iš 8. Apskaičiuosime, kad $367=45\times8+7$, todėl

$$2\,937=45\times8^2+7\times8+1.$$

Dar reikia 45 padalyti iš 8. Gauname

$$2\,937=5\times8^3+5\times8^2+7\times8+1,$$

tai jau pažįstamas užrašas: $2\,937_{10}=5\,571_8$.

Taigi suformuluojame taisyklę: skaitmenys, kuriais sveikas skaičius išreiškiamas aštuonetainėje sistemoje, yra lygūs liekanoms, kurios gaunamos, šį skaičių nuosekliai dalijant iš 8, surašytoms atvirkščia tvarka. Nesunku įsitikinti, kad ši taisyklė tinka ir bet kokiai kitai pozicinei sistemai, kai joje reikia išreikšti dešimtainį skaičių. Suprantama, daliklis čia bus skaičiavimo sistemos, kurioje ketiname išreikšti duotąjį skaičių, pagrindas.

Apskaičiavimus patogu išdėstyti taip, kaip parodyta žemiau pateikiamame pavyzdyje. Skaičių $18\,594_{10}$ reiškiame aštuonetainėje sistemoje:

```
18594 | 8
 25     2324 |8
  19      72   290 |8
   34      4    50   36 |8
    2            2    4   4
```

Taigi $18\,594_{10}=44\,242_8$.

Pratimai

10. Skaičius 10_8, 100_8, $1\,000_8$, $10\,000_8$ išreikškite dešimtainėje sistemoje.

11. Skaičius 12_8, 144_8, $1\,750_8$, $23\,420_8$ parašykite dešimtainėje sistemoje.

12. Sudarykite sudėties ir daugybos lenteles penketainėje sistemoje.

13. Sudarykite sudėties lentelę aštuonetainėje sistemoje.

14. Sudarykite daugybos lentelę aštuonetainėje sistemoje.

15. Atlikite aritmetinius veiksmus penketainėje sistemoje: a) $314+232$; b) $2\,431-1\,302$; c) 42×31; d) $404\,401:113$.

16. Atlikite aritmetinius veiksmus aštuonetainėje sistemoje: a) $4\,312+2\,767$; b) $6\,714-3\,505$; c) 27×72; d) $5\,250:76$; e) $(364+207)\times12+(4\,301-613):32$.

17. Skaičius $6\,754_8$, $5\,021_8$, $3\,270_8$ išreikškite dešimtainėje sistemoje.

18. Dešimtainius skaičius 8 125, 6 378, 4 907 išreikškite aštuonetainėje sistemoje.

19. Visus 16 pratimo skaičius išreikškite dešimtainėje skaičiavimo sistemoje ir šioje sistemoje patikrinkite, ar teisingai atlikote veiksmus.

4. Sisteminės trupmenos. Trupmenų reiškimas įvairiose skaičiavimo sistemose. Žinome, kad dešimtaine trupmena vadinama tokia trupmena, kurios vardiklis yra dešimties laipsnis. Dešimtainė trupmena išoriškai skiriasi nuo sveikojo skaičiaus tik tuo, kad jos užraše yra kablelis, atskiriantis sveikąją dalį nuo trupmeninės. Aritmetinių veiksmų taisyklės skiriasi tik tuo, kad yra papildomų nurodymų dėl kablelio vietos.

Toks panašumas nėra atsitiktinis. Taip yra todėl, kad įprastas dešimtainės trupmenos (mažesnės už vienetą) užrašas yra jos išraiška kelių dėmenų suma: kiekvienas toks dėmuo yra skaičiaus, atvirkštinio pagrindui, t. y. $\frac{1}{10}$ laipsnis. Pavyzdžiui, užrašas 0,5634 reiškia:

$$0{,}5634=5\times\left(\frac{1}{10}\right)^1+6\times\left(\frac{1}{10}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{10}\right)^3+4\times\left(\frac{1}{10}\right)^4.$$

Kaip ir sveikieji skaičiai, skaitmenys yra koeficientai.

Galima pasakyti, kad trupmeninis skaičius dešimtaine trupmena užrašomas, pritaikius trupmeniniams skaičiams bendrą principą, pagal kurį pozicinėje dešimtainėje skaičiavimo sistemoje užrašomi skaičiai. Bendriausiu atveju mišrusis skaičius, turintis sveikąją ir trupmeninę dalį, išreiškiamas 10 ir $\frac{1}{10}$ laipsnių suma, pavyzdžiui:

$$6\,238{,}754=6\times10^3+2\times10^2+3\times10^1+8\times10^0+7\times$$
$$\times\left(\frac{1}{10}\right)^1+5\times\left(\frac{1}{10}\right)^2+4\times\left(\frac{1}{10}\right)^3.$$

Žinant laipsnio neigiamo rodiklio sąvoką — $\frac{1}{10}=10^{-1}$ — šį užrašą galima pakeisti natūralesniu:

$$6\,238{,}754=6\times10^3+2\times10^2+3\times10^1+8\times10^0+$$
$$+7\times10^{-1}+5\times10^{-2}+4\times10^{-3}.$$

Dešimtainės trupmenos glaudžiai susijusios su dešimtaine skaičiavimo sistema ir yra *sisteminių trupmenų* atskiras atvejis. Pastarąsias analogišku būdu galima sukonstruoti bet kurioje pozicinėje skaičiavimo sistemoje. Pavyzdžiui, trupmeną

$$5\times\left(\frac{1}{8}\right)^1+6\times\left(\frac{1}{8}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{8}\right)^3+4\times\left(\frac{1}{8}\right)^4$$

natūralu pavadinti *aštuonetaine* trupmena ir užrašyti taip: $0{,}5634_8$.

Aritmetinių veiksmų su aštuonetainėmis trupmenomis taisyklės tokios pat, kokios ir su dešimtainėmis, tačiau veiksmus su vienaženkliais skaičiais atliekame ne pagal dešimtaines, o pagal aštuonetaines sudėties ir daugybos lenteles. Aišku, kad šių veiksmų taisyklės tinka ir mišriesiems skaičiams, turintiems sveikąją

ir trupmeninę dalis. Pateiksime du pavyzdžius, kaip sudedamos ir dauginamos aštuonetainės trupmenos:

$$\begin{array}{r} 3{,}2645 \\ +\ 0{,}1734 \\ \hline 3{,}4601 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}756 \\ \times\ 0{,}12 \\ \hline 1734 \\ 756 \\ \hline 0{,}11514 \end{array}$$

Žinome, kad ne kiekvieną paprastąją trupmeną galima išreikšti baigtine dešimtaine trupmena, pavyzdžiui: $\frac{1}{3}=0{,}3333...$ Atlikdami veiksmus su dešimtainėmis trupmenomis, kai pasitaiko tokia begalinė trupmena, turime ją nutraukti ir pakeisti baigtine, kuri duotąjį skaičių išreiškia tik apytiksliai.

Tokia pati padėtis ir kitose pozicinėse skaičiavimo sistemose. Be to, vienas ir tas pats skaičius vienoje skaičiavimo sistemoje gali būti reiškiamas baigtine trupmena, o kitoje — begaline, ir atvirkščiai. Pavyzdžiui, dešimtainėje skaičiavimo sistemoje:

$$\frac{1}{5}=0{,}2_{10}, \qquad \frac{1}{6}=0{,}1666..._{10},$$

o dvyliktainėje —

$$\frac{1}{5}=0{,}2497\ 2497\ 2497..._{12}, \qquad \frac{1}{6}=0{,}2_{12}.$$

Tuo tarpu abiejose sistemose

$$\frac{1}{4}=0{,}25_{10}=0{,}3_{12}$$

ir

$$\frac{1}{7}=0{,}142857\ 142857..._{10}=0{,}186\overline{0}35\ 186\overline{0}35..._{12}.$$

Kai trupmenas, parašytas vienoje pozicinėje skaičiavimo sistemoje, išreiškiame kitoje, turime nepamiršti, kad kartais galime gauti begalines trupmenas.

Norėdami sisteminę trupmeną, parašytą bet kurioje skaičiavimo sistemoje, išreikšti dešimtaine, galime, kaip ir sveikiesiems skaičiams, pritaikyti sisteminės trupmenos skaidinių sumą. Pavyzdžiui, aštuonetainė trupmena

$$0{,}1725_8=1\times\left(\frac{1}{8}\right)+7\times\left(\frac{1}{8}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{8}\right)^3+5\times\left(\frac{1}{8}\right)^4;$$

bet $\frac{1}{8}=0{,}125_{10}$, tai iš šios lygybės išplaukia:

$$0{,}1725_8=1\times0{,}125_{10}+7\times0{,}125_{10}^2+2\times0{,}125_{10}^3+$$
$$+5\times0{,}125_{10}^4=0{,}239501953125_{10}.$$

Atvirkščiai, dešimtainę trupmeną tokiu pat būdu išreikšti aštuonetaine gana sunku ne tik todėl, kad teks skaičiuoti aštuonetainėje sistemoje, bet ir todėl, kad skaičiaus $0{,}1_{10}$ negalima išreikšti baigtine aštuonetaine trupmena. Kaip ir sveikiesiems skaičiams, galima pasiūlyti paprastą būdą, kurį taikydami turėsime atlikti aritmetinius veiksmus dešimtainėje sistemoje.

Tarkime, duota tam tikra dešimtainė trupmena (mažesnė už vienetą), pavyzdžiui 0,462890625, kurią reikia išreikšti aštuonetainėje sistemoje. Norėdami surasti šio skaičiaus pirmąjį skaitmenį po kablelio, turime žinoti, kiek jame yra aštuntųjų dalių. Tuo tikslu galime iš pradžių padauginti duotąjį skaičių iš 8 ir sužinoti, kiek sveikųjų skaičių yra gautoje sandaugoje.

Kadangi $0{,}462890625 \times 8 = 3{,}703125$, sveikoji dalis turi 3 vienetus; vadinasi, pradinėje trupmenoje yra trys aštuntosios dalys. Kitaip tariant, pirmasis po kablelio aštuonetainis skaitmuo yra 3. Kitą skaitmenį galime gauti taip pat: atimame iš gautosios sandaugos skaičių 3 ir likusį skaičių padauginame iš 8:

$$0{,}703125 \times 8 = 5{,}625.$$

Operacija, kurią atlikome, atitinka trijų aštuntųjų atimtį iš pradinės trupmenos ir skirtumo dauginimą iš 64. Gautas rezultatas rodo, kad kitas aštuonetainis skaičiaus skaitmuo yra 5. Paskutinis skaitmuo gaunamas taip pat:

$$0{,}625 \times 8 = 5{,}000.$$

Gavome baigtinę aštuonetainę trupmeną

$$0{,}355_8 = 0{,}462890625_{10}.$$

Šis pavyzdys buvo parinktas taip, kad gautume baigtinę aštuonetainę trupmeną.

Praktikoje dažnai galime gauti begalinę aštuonetainę trupmeną. Pavyzdžiui, išreikšdami skaičių $0{,}175_{10}$ aštuonetaine trupmena, gausime begalinę periodinę trupmeną:

$$0{,}175_{10} = 0{,}1\,3146\,3146\ldots_8.$$

Suformuluokime bendrą taisyklę: **norėdami sveikąjį skaičių išreikšti skaičiavimo sistemoje, kurios pagrindas *n*, turime jį nuosekliai padalyti iš *n* (atmesdami liekanas), o norėdami išreikšti trupmeną, mažesnę už vienetą, turime ją nuosekliai padauginti iš *n* (atmesdami sveikuosius skaičius). Skaičiaus *n*-tainėje skaičiavimo sistemoje skaitmenys pirmuoju atveju bus nuoseklios liekanos, surašytos atvirkščia tvarka, o antruoju atveju — sveikosios dalys, surašytos ta tvarka, kuria jos buvo gautos.**

Kai skaičius yra mišrus, sveikąją ir trupmeninę dalis reikia išreikšti kita skaičiavimo sistema atskirai. Pavyzdžiui, norėdami

dešimtainį skaičių $378{,}8359375_{10}$ išreikšti aštuonetainėje sistemoje, turime atlikti šiuos veiksmus:

```
378 |8                0,8359375
 58  47  |8             × 8
  2   7   5           6,6875000
                       × 8
                      5,5000
                       8
                      4,0
```

Taigi

$$378{,}8359375_{10} = 572{,}654_8.$$

Pratimai

20. Trupmenas $0{,}11011_2$; $0{,}31_4$; $0{,}234_5$ išreikškite dešimtainėmis.

21. Trupmenas $0{,}625_8$; $0{,}777_8$; $0{,}404_8$ išreikškite dešimtainėmis.

22. Dešimtainius skaičius 0,828125; 0,953125; 1,453125; 13,8046875; 425,53125; 987,90625 išreikškite aštuonetainėje sistemoje.

23. Įrodykite, kad kiekviena baigtinė aštuonetainė trupmena yrá išreiškiama baigtine dešimtaine trupmena. Ar teisingas atvirkščias teiginys?

24. Kokias sąlygas turi tenkinti trupmenos, kurios išreiškiamos baigtine dešimtaine trupmena? Baigtine aštuonetaine trupmena?

25*. Atsakykite į tą patį klausimą, kai vietoj dešimtainės arba aštuonetainės sistemos paimama bet kokia pozicinė skaičiavimo sistema, kurios pagrindas n.

5. Dvejetainė skaičiavimo sistema. Dvejetainė aritmetika. Dvejetainė skaičiavimo sistema yra pozicinė sistema, kurios pagrindas du. Norint parašyti skaičių šioje sistemoje, reikia tik dviejų skaitmenų: 0 ir 1. Todėl dvejetainį skaičiaus užrašą nesunkiai galime gauti, pavartodami fizikinius elementus, turinčius du skirtingus stabilius būvius. Kaip tik dėl to dvejetainė skaičiavimo sistema plačiai taikoma šiuolaikinėse elektroninėse skaičiavimo mašinose. Kitas priežastis paaiškinsime vėliau.

Dvejetainės sistemos pagrindas, skaičius du, šioje sistemoje rašomas kaip 10. Pridėję prie šio skaičiaus vienetą, gauname 11, kuris yra dvejetainis skaičiaus 3 užrašas. Pridėję dar vienetą, turėsime perkelti į antrąjį, o paskui ir į trečiąjį skyrių. Taip gausime dvejetainį skaičiaus keturi užrašą — 100, kuris yra trečiojo skyriaus vienetas bei pagrindo kvadratas.

Lentelėje surašyta, kokia yra pirmųjų natūrinių skaičių išraiška dvejetainėje sistemoje:

Dešimtainiai skaičiai	Dvejetainiai skaičiai	Dešimtainiai skaičiai	Dvejetainiai skaičiai
1	1	13	1 101
2	10	14	1 110
3	11	15	1 111
4	100	16	10 000
5	101	17	10 001
6	110	18	10 010
7	111	19	10 011
8	1 000	20	10 100
9	1 001	25	11 001
10	1 010	50	110 010
11	1 011	100	1 100 100
12	1 100	200	11 001 000

Iš šios lentelės aišku, kad skaičiaus užrašas dvejetainėje sistemoje maždaug tris kartus ilgesnis už užrašą dešimtainėje sistemoje; todėl, skaičiuojant rankomis, dvejetainė sistema yra nepatogi ir nenaudinga. Kitas jos trūkumas — vienodumas, dėl to padidėja tikimybė, kad galime klaidingai parašyti arba perskaityti.

Gali atrodyti, kad, reikalaujant didesnio skyrių skaičiaus, padidėja reikiamų įrenginių skaičius. Bet taip nėra. Mašinai svarbu ne skyrių skaičius, o visų elementų stabilių būvių, naudojamų vaizduojant skaičių, bendras kiekis. Šiuo požiūriu dvejetainė sistema yra ekonomiškesnė už dešimtainę, ir tai dar viena jos vartojimo priežasčių.

Vaizduojant dešimtainėje sistemoje sveikus skaičius nuo 1 iki 999, reikia trijų skyrių po dešimt būvių kiekviename; bendras skirtingų būvių skaičius lygus trisdešimčiai. Dvejetainėje sistemoje tiems patiems skaičiams reikia dešimties skyrių ($999_{10} = 1111100111_2$), bet po du būvius kiekviename, todėl bendras reikiamų skirtingų būvių skaičius lygus dvidešimčiai.

Šiuo požiūriu dar ekonomiškesnė yra trejetainė pozicinė sistema. Jei užrašant skaičius nuo 1 iki 10^9 dešimtainėje sistemoje reikia 90 skirtingų būvių, o dvejetainėje — 60, tai trejetainėje sistemoje pakanka tik 57 būvių.

Trejetainė sistema plačiau nepaplito, nes sunku sukurti patikimus fizikinius elementus, turinčius tris stabilius būvius. Bet mašinų, dirbančių trejetainėje skaičiavimo sistemoje, yra; pavyzdžiui, elektroninė mašina „Setunė", sukonstruota ir pagaminta Maskvos M. Lomonosovo valstybiniame universitete.

Aritmetiniai veiksmai dvejetainėje sistemoje atliekami pagal taisykles, bendras visoms pozicinėms sistemoms. Vienaženklių skaičių sudėties lentelė dvejetainėje sistemoje atrodo taip:

$$0+0=0;\ 0+1=1+0=1;\ 1+1=10.$$

(Šioje lentelėje neįprastai atrodo tik paskutinis užrašas, todėl ją nesunku įsiminti.) Naudodamiesi šia lentele, galėsime sudėti ir atimti daugiaženklius skaičius dvejetainėje sistemoje. Be to, kai dėmenų daug, kai kuriuose skyriuose gali susikaupti keli perkeliami vienetai. Juos patogu užrašyti virš dėmenų (o ne „turėti mintyje") taip, kaip parodyta pavyzdyje:

```
              111
          111111111 1111
         1111111111 11111
         ----------------
          1011100111,01101
    +        10111101,11110
            111101111,01111
            100100111,10011
         ----------------
         11010111100,01101
```

Daugybos lentelė dvejetainėje sistemoje labai paprasta: jei nerašytume sandaugų iš nulio, visada lygių nuliui, iš šios lentelės liktų tik viena eilutė.

$$1\times1=1.$$

Bet dauginimas iš 1 skaičiaus nekeičia. Todėl daugiaženklių skaičių dauginimas dvejetainėje sistemoje pakeičiamas tik poslinkiu ir sudėtimi. Šis aritmetinių operacijų atlikimo dvejetainėje sistemoje paprastumas taip pat yra dar viena priežasčių, dėl kurios dvejetainė sistema taikoma šiuolaikinėse skaičiavimo mašinose.

Dar XVI—XVII a. žinomas matematikas, logaritmų išradėjas Džonas Neperis pastebėjo, kad dvejetainėje sistemoje patogu atlikti aritmetinius veiksmus. Jo knygoje „Rabdologija", išleistoje 1617 m., aprašyta speciali „skaičiavimo lenta", kuria remiantis, lengviau sudėti ir atimti daugiaženklius skaičius, pakelti kvadratu ir ištraukti kvadratinę šaknį. Šioje „lentoje" pritaikyta dvejetainė skaičiavimo sistema.

Štai kaip atrodo daugiaženklių skaičių daugyba dvejetainėje sistemoje:

```
              1111001011
         ×       1110101
         ---------------
    1111111111
   1111111111111
   ------------------
           1111001011
         1111001011
        1111001011
       1111001011
      1111001011
   ------------------
   11011110111000111
```

Tarpas tarp dauginamųjų ir dalinių sandaugų paliekamas, norint užrašyti perkeliamus vienetus.

Atimtį ir dalybą pailiustruosime pavyzdžiais:

```
_ 1111000110     1011001100101  | 1101
    10110101     1101           |----------
 ----------      -----            110111001
  1100010001     10010
                  1101
                  -----
                   10111
                    1101
                   -----
                    10100
                     1101
                    -----
                      1110
                      1101
                      -----
                       1101
                       1101
                       ----
                          0
```

Pritaikius specialų būdą, atimtį galima suprastinti, pakeičiant ją sudėtimi. Remsimės *dvejetainio papildinio* sąvoka.

Duotojo teigiamo dvejetainio skaičiaus dvejetainiu papildiniu vadiname tokį teigiamą dvejetainį skaičių, kurį pridėję prie duotojo, gauname sumą, lygią tam tikro skyriaus vienetui. Pavyzdžiui, skaičiaus 101 dvejetainis papildinys yra 11, nes $101+11=$ $=1000$. Skaičiaus 1111 dvejetainis papildinys yra 1, nes $1111+$ $+1=10\,000$, o skaičiaus 1011101 — skaičius 100011, nes

```
+ 1011101
   100011
 --------
 10000000
```

Dvejetainis papildinys analogiškas papildiniui, kurį pridėję, gauname apvalųjį skaičių. Taip darome, kai skaičiuojame mintinai dešimtainėje skaičiavimo sistemoje. Pavyzdžiui, norėdami apskaičiuoti skirtumą $524-87$, galime pasielgti taip:

$$524-(100-13)=524+13-100=537-100=437,$$

o tai paprasčiau negu tiesiogiai atimti skaičių 87. Šį kartą skaičius 13 yra skaičiaus 87 dešimtainis papildinys, nes, sudėję juos, gauname apvalųjį skaičių 100, su kuriuo nesunku atlikti veiksmus.

Pateiktas dvejetainio papildinio apibrėžimas nėra pilnas, todėl jis neapibrėžia papildinio vienareikšmiškai. Iš tiesų, pagal šį apibrėžimą išeina, kad skaičiaus 101 dvejetainiu papildiniu galime laikyti 11, nes $101+11=1000$, bet galime laikyti ir 1111011, nes $101+1111011=10\,000\,000$.

Vienareikšmiškai apibrėžti dvejetainį papildinį galime vienu iš šių dviejų būdų: arba kiekvieną kartą nagrinėjame papildinį, kurį pridėję prie duotojo skaičiaus, gauname artimiausią apva-

lųjį skaičių, kaip tai darėme pateiktuose pavyzdžiuose, arba iš anksto fiksuojame tam tikrą apibrėžtą skyrių skaičių. Kol kas taikysime pirmąjį būdą.

Dešimtainį papildinį gauname atimdami (paprastai atimame mintyje). Dvejetainį papildinį taip pat galime gauti atimdami, bet padaryti tai mintinai sunku, be to, dvejetainis papildinys tuomet netenka prasmės, nes jis tam ir reikalingas, kad išvengtume atimties. Tuo svarbesnė yra taisyklė, kaip galima mechaniškai rasti dvejetainį papildinį.

Išnagrinėkime kelių penkiaženklių ir šešiaženklių dvejetainių skaičių dvejetainius papildinius, kuriuos pridėję, gauname artimiausią apvalųjį skaičių:

skaičius	10101	papildinys	01011 = 01010+1
	10111		01001 = 01000+1
	11101		00011 = 00010+1
	100111		011001 = 011000+1
	111010		000110 = 000101+1
	111100		000100 = 000011+1

Taigi, išanalizavę šiuos pavyzdžius, suformuluojame taisyklę, kuri teisinga visais atvejais: **norint gauti dvejetainį papildinį, reikia visus duotojo skaičiaus nulius pakeisti vienetais, o vienetus — nuliais, po to prie gautojo skaičiaus pridėti žemesniojo skyriaus vienetą.** Nulius skaičiaus pradžioje galima praleisti.

Kad ši taisyklė teisinga, nesunku įsitikinti: jei prie duotojo skaičiaus pridėtume jam „simetrišką“ (t. y. tą, kuriame nuliai pakeisti vienetais, o vienetai — nuliais), gautoji suma būtų sudaryta tik iš vienetų. Dabar aišku, kad, pridėję prie šios sumos žemesniojo skyriaus vienetą, gausime vienetą su visais nuliais, t. y. sekančio skyriaus vienetą. Vadinasi, pradinio skaičiaus dvejetainis papildinys lygus „simetriškam“ skaičiui plius žemesniojo skyriaus vienetas, ką ir tvirtinome iš pradžių.

Naudojantis dvejetainiu papildiniu, atimtį galima pakeisti sudėtimi: norėdami atimti duotąjį skaičių, galime pridėti jo papildinį ir po to atimti to skyriaus, kurio papildinį sudarėme, vienetą. Pavyzdžiui, reikia apskaičiuoti skirtumą: 1111001011 — 1010110111. Atėminio dvejetainis papildinys, kaip jau įrodėme, lygus 0101001000+1=0101001001. Pridėję jį prie turinio, gauname

$$\begin{array}{r} 1111001011 \\ + \; 0101001001 \\ \hline 10100010100 \end{array}$$

Dar reikia atkreipti dėmesį į tai, kad papildėme iki vienuoliktojo skyriaus, todėl patį kairįjį rezultato vienetą reikia atimti, t. y. tiesiog atmesti. Ieškomasis skirtumas lygus 100010100 (dar praleidome vieną nulį, kuris buvo prieš aukštesnįjį vienetą). Ar teisingai atėmėme, galime patikrinti tiesiog atimdami arba gautąjį rezultatą sudėję su atėminiu, arba tiesiog atimdami.

Atimtį pakeitus sudėtimi, lengviau konstruoti skaičiavimo mašiną. Dvejetainį papildinį galima gauti paprasčiausiai mechaniškai pritaikius suformuluotą taisyklę, o vienetą, kuris lieka iš kairės, galima atimti, pašalinus atitinkamą mašinos skyrių. Tuomet operacijos rezultatas išsyk gaunamas teisingas.

Dešimtainiai skaičiai dvejetainėje sistemoje, o dvejetainiai skaičiai dešimtainėje išreiškiami pagal taisykles, bendras visoms pozicinėms skaičiavimo sistemoms, todėl jų galime nenagrinėti. Beje, yra paprastesnis ir trumpesnis skaičių reiškimo dvejetainėje sistemoje būdas, pagrįstas mišriųjų skaičiavimo sistemų taikymu. Šį klausimą išnagrinėsime kitame skyrelyje.

Pratimai

26. Dvejetainį skaičių 10110110,1101 išreikškite dešimtainėje sistemoje.

27. Dešimtainį skaičių 467,65625 išreikškite dvejetainėje sistemoje.

28. Atlikite veiksmus dvejetainėje skaičiavimo sistemoje:

a) $\begin{array}{r} 1011101001{,}101 \\ +\,10111011{,}011 \\ \hline 1110100{,}111 \end{array}$ b) $1111010001 \times 10001011$; c) $1110010111001 : 10011$.

Išreiškę visus skaičius dešimtainiais ir atlikę veiksmus, patikrinkite, ar teisingai apskaičiavote.

29. Atimkite $1000100011 - 1100111$ tiesiogiai ir taikydami dvejetainį papildinį.

6*. Mišriosios skaičiavimo sistemos. Jei skaičiaus, parašyto tam tikroje skaičiavimo sistemoje, kiekvieną skaitmenį išreikšime kitoje skaičiavimo sistemoje (kurios pagrindas yra mažesnis), gausime skaičiaus išraišką *mišrioje* skaičiavimo sistemoje. Mišriosios sistemos jau buvo vartojamos senovės Babilone: skaičius, mažesnis už šešiasdešimt, babiloniečiai faktiškai užrašydavo dešimtainėje sistemoje. Ypač plačiai tokias sistemas vartojo Artimųjų Rytų ir Vidurinės Azijos matematikai tuo metu, kai dešimtainė sistema jau gana plačiai paplito, bet buvo vartojama ir šešiasdešimtainė. Užrašas 34°27′14″ iš esmės yra mišriosios skaičiavimo sistemos vartojimo pavyzdys: laipsniai, minutės ir sekundės yra šešiasdešimtainės sistemos skyriai, kurių kiekvienas parašytas dešimtainėje skaičiavimo sistemoje. Šios sistemos, kaip mišriosios, ypatybės ypač išryškėja atliekant kurią nors operaciją, pavyzdžiui, sudėtį:

$$\begin{array}{r} 34°27'14'' \\ +\,18°32'48'' \\ \hline 53°00'02'' \end{array}$$

Perkėlimo iš žemesniojo skyriaus į aukštesnįjį taisyklės skirtinguose skyriuose yra skirtingos.

Dabar praktikoje vartojamos mišriosios sistemos, kuriose antroji yra dvejetainė: dvejetainė-dešimtainė, dvejetainė-aštuonetainė ir dvejetainė-šešioliktainė. Tokios sistemos labai paplito, nes mokslininkai stengėsi labiau išnaudoti dvejetainės sistemos privalumus ir įveikti jos trūkumus.

Pirmosios elektroninės skaičiavimo mašinos dirbo įprastoje dešimtainėje sistemoje, bet vartojo elektroninius elementus, turinčius du stabilius būvius. Iš jų kombinacijų buvo konstruojami elementai, turintys dešimtis būvių ir tinkantys vaizduoti dešimtainės sistemos skaitmenims. Taip ir atsirado *dvejetainė-dešimtainė* sistema.

Įvairiems dešimtainiams skaitmenims išreikšti dvejetainėje sistemoje reikia įvairaus dvejetainių skyrių kiekio — nuo vieno skyriaus nuliui ir vienetui iki keturių skyrių aštuonetui ir devynetui. Kad nereiktų vartoti jokių skiriamųjų ženklų, dvejetainei dešimtainio skaitmens išraiškai dvejetainėje-dešimtainėje sistemoje visuomet skiriami keturi dvejetainiai skyriai. Grupė, sudaryta iš keturių dvejetainių skyrių ir skirta vieno dešimtainio skaitmens išraiškai, vadinama tetrada [1].

Skaičius 3842 dvejetainėje-dešimtainėje sistemoje atrodo taip:

0011 1000 0100 0010.

Kad būtų patogiau skaityti, tetrados viena nuo kitos atskirtos tarpais. Apskritai visus skaitmenis galima surašyti greta, o nulius priekyje arba gale po kablelio galima praleisti. Tik reikia atsiminti, kad kiekvieną grupę sudaro keturi skyriai ir jie skaičiuojami į kairę ir į dešinę nuo kablelio. Pavyzdžiui, skaičiaus 1010010011 0000, 01101 dvejetainis-dešimtainis užrašas į tetradas skaidomas taip:

0010 1001 00110000, 0110 1000

ir reiškia dešimtainį skaičių 2930,68.

Iš šešiolikos galimų įvairių tetradų 0000, 0001, 0010, ..., 1110, 1111 dvejetainėje-dešimtainėje sistemoje vartojamos tik dešimt pirmųjų; visos kitos tetrados nereiškia jokio dešimtainio skaitmens ir todėl dvejetainėje-dešimtainėje sistemoje neturi prasmės. Dėl to aritmetines operacijas dvejetainėje-dešimtainėje sistemoje atlikti sunkiau.

Pavyzdžiui, sudedant 45+34 dvejetainėje-dešimtainėje sistemoje, galima daryti taip pat, kaip daroma dvejetainėje:

$$\begin{array}{r} 0100\,0101 \\ +\;0011\,0100 \\ \hline 0111\,1001 \end{array}$$

---

[1] Tetrada (graik.) — ketvertas.

Taip sudėję, gauname teisingą rezultatą 79. Sudėję 45+36 dvejetainėje sistemoje, gauname

$$\begin{array}{r} 01000101 \\ +\ 00110110 \\ \hline 01111011 \end{array}$$

Tetrada, išreiškianti sumą, šį kartą neturi prasmės dvejetainėje-dešimtainėje sistemoje. Suma, kuri lygi 81, turi būti išreikšta dvejetainiu-dešimtainiu užrašu 10000001. Kaip ir sudedant kampus, šį kartą perkėlimo taisyklės skirtinguose skyriuose turi būti skirtingos.

Taigi matome, kad dvejetainė-dešimtainė sistema nelabai tinka atliekant aritmetinius veiksmus su skaičiais. Tačiau ji reikalinga, kai žmogus dirba su elektronine skaičiavimo mašina, nes įvesti į mašiną dešimtainį skaičių galima tik dvejetaine-dešimtaine forma. Dešimtainiai skaičiai išreiškiami dvejetainiais-dešimtainiais mechaniškai. Skaičiai įvedami naudojantis „pirminiais kaupmenimis“— perfokortomis arba perfojuostomis su išmuštomis jose skylėmis. Perforacija irgi turi dvejetainį pobūdį: skylė reikiamoje vietoje suvokiama kaip 1, o ten, kur jos nėra — kaip 0. Perforavimo mašina — perforatorius — sukonstruota taip, kad, paspaudus klavišą su pažymėtu jame dešimtainiu skaitmeniu, perforatorius automatiškai reikiamoje vietoje išmuša atitinkamą tetradą.

Nors dvejetainė-dešimtainė sistema ir turi trūkumų, kuriuos paminėjome, ji vis dėlto vartojama atliekant aritmetines operacijas „mini-kompiuteriuose“ (skaičiuokliuose) — kišeninėse elektroninėse skaičiavimo mašinose (pavyzdžiui, tokiose, kaip ESM „Elektronika“, gaminamose TSRS). Šie skaičiuokliai neturi tarpinių informacijos kaupmenų. Kai įvedamas skaičius, paspaudus klavišą su reikiamu skaitmeniu, į mašiną automatiškai perduodama atitinkama tetrada.

Dvejetainė-aštuonetainė sistema yra analogiška ką tik išnagrinėtai dvejetainei-dešimtainei. Kadangi aštuonetainėje skaičiavimo sistemoje didžiausias skaitmuo yra septyni, tai, norint užrašyti bet kokį aštuonetainį skaitmenį, pakanka trijų skyrių. Grupė iš trijų skyrių, skirta užrašyti aštuonetainiui skaitmeniui, vadinama *triada.* Pavyzdžiui, aštuonetainis skaičius 6517,3 dvejetainėje-aštuonetainėje sistemoje užrašomas taip: 110101001111,011.

Vartojamos visos įmanomos dvejetainės-aštuonetainės sistemos triados, o tai jau svarbus šios sistemos pranašumas lyginant su dvejetaine-dešimtaine. Kitas, dar svarbesnis, jos pranašumas tas, kad dvejetainio-aštuonetainio skaičiaus užrašas sutampa su jo dvejetainiu užrašu.

Išnagrinėkime pavyzdžius ir įsitikinkime, kad šis teiginys teisingas. Tarkime, duotas skaičius 2814, 6875_{10}. Jo dvejetainis užrašas toks: $101011111110{,}1011_2$. Aštuonetainėje sistemoje šis skaičius turi išraišką $5376{,}54_8$. Pakeitę aštuonetainius skaitmenis

triadomis, gauname 1010111111 10,101100, o ši išraiška sutampa su dvejetaine išraiška.

Dvejetainis ir dvejetainis-aštuonetainis užrašai sutampa, nes yra lygybė $8=2^3$. Šis sutapimas, leidžiantis įveikti dvejetainės skaičiavimo sistemos trūkumus, kartu yra priežastis, dėl kurios ESM naudojamos aštuonetainės ir dvejetainės-aštuonetainės sistemos.

Kaip jau buvo minėta 5 skyrelyje, dvejetainio skaičiaus užrašas yra ilgas ir monotoniškas, o turėti reikalą su ilgu tik vienetų ir nulių rinkiniu sunku. Kad užrašai sutrumpėtų, dvejetainis skaičius suskaidomas į triadas, o paskui kiekviena triada pakeičiama atitinkamu aštuonetainiu skaitmeniu. Kitaip tariant, laikoma, kad duotasis dvejetainis skaičius yra dvejetainis-aštuonetainis, o žmogus jau susiduria tik su aštuonetainiu.

Dar pažymėsime, kad aštuonetainė sistema yra patogi, kai reikia rankomis skaičių išreikšti dvejetaine sistema. Tuo tikslu dešimtainiai skaičiai išreiškiami aštuonetaine sistema, nes tai paprasčiau ir trumpiau, o paskui kiekvienas aštuonetainis skaitmuo pakeičiamas atitinkama triada. Be to, pateikiant informaciją mašinai, perforatorius mechaniškai aštuonetainius skaičius išreiškia dvejetainiais, kaip ir dvejetainėje-dešimtainėje sistemoje.

Pirmosios ir antrosios kartos [1] elektroninėse skaičiavimo mašinose skyrių, skirtų dvejetainio skaičiaus užrašui, kiekis patogiai dalijosi į triadas; todėl buvo paranku vartoti dvejetainę-aštuonetainę ir aštuonetainę sistemas. Trečiosios kartos tipo ES (Vieningoji sistema) elektroninių skaičiavimo mašinų pagrindinis vienetas, iš kurio formuojami daugiaskilčiai dvejetainiai skaičiai, yra grupė, sudaryta iš aštuonių skyrių — *baitas*. Šią grupę patogu dalyti ne į triadas, o į dvi tetradas. Tuomet, kai žmogus dirba su mašina, parankesnė *dvejetainė-šešioliktainė* skaičiavimo sistema.

Šešioliktainė skaičiavimo sistema yra įprasta pozicinė sistema, kurios pagrindas šešiolika. Kadangi visi skaičiai, mažesni už pagrindą, yra vienaženkliai, tai šešioliktainėje sistemoje reikia turėti 16_{10} skaitmenų. Dešimties dešimtainės sistemos skaitmenų neužtenka, todėl jie papildomi šešiomis pirmomis lotynų abėcėlės raidėmis: A, B, C, D, E, F. Jei kiekvieną šešioliktainės sistemos skaitmenį pakeistume dvejetaine tetrada, gautume dvejetainę-šešioliktainę sistemą, kurioje vartojamos visos įmanomos tetrados.

Dvejetainių tetradų ir šešioliktainių skaitmenų atitiktis yra tokia:

---

[1] Pirmosios elektroninės skaičiavimo mašinos, tokios, kaip „Strela", dirbo elektroninių lempų pagrindu. Jos vadinamos pirmosios kartos mašinomis. Antrosios kartos mašinų, pavyzdžiui „Minsko", pagrindiniai elementai buvo puslaidininkiai. Dabar šalies skaičiavimo centruose trečiosios kartos ESM sudaro vieningąją sistemą (ES); jų veikimas pagrįstas integralinėmis schemomis.

0000 — 0	0100 — 4	1000 — 8	1100 — C
0001 — 1	0101 — 5	1001 — 9	1101 — D
0010 — 2	0110 — 6	1010 — A	1110 — E
0011 — 3	0111 — 7	1011 — B	1111 — F

Aritmetiniai veiksmai šešioliktainėje skaičiavimo sistemoje atliekami pagal taisykles, bendras visoms pozicinėms sistemoms. Aišku, kad reikia turėti „sudėties lentelę" ir „daugybos lentelę", kuriose būtų pateiktos visos įmanomos vienaženklių skaičių, paimtų poromis, sumos ir sandaugos šešioliktainėje sistemoje. Skaitytojas pats dabar jau nesunkiai gali sudaryti tokią lentelę. Kadangi ji yra labai didelė, pateikiame tik jos fragmentą, pasitenkindami dviem sudėties ir daugybos lentelių stulpeliais:

9+1=A	C+1=D	7×1=7	D×1=D
9+2=B	C+2=E	7×2=E	D×2=1A
9+3=C	C+3=F	7×3=15	D×3=27
9+4=D	C+4=10	7×4=1C	D×4=34
9+5=E	C+5=11	7×5=23	D×5=41
9+6=F	C+6=12	7×6=2A	D×6=4E
9+7=10	C+7=13	7×7=31	D×7=5B
9+8=11	C+8=14	7×8=38	D×8=68
9+9=12	C+9=15	7×9=3F	D×9=75
9+A=13	C+A=16	7×A=46	D×A=82
9+B=14	C+B=17	7×B=4F	D×B=8F
9+C=15	C+C=18	7×C=54	D×C=9C
9+D=16	C+D=19	7×D=5B	D×D=A9
9+E=17	C+E=1A	7×E=62	D×E=B6
9+F=18	C+F=1B	7×F=69	D×F=C3

Remdamiesi sudėties ir daugybos lentelėmis, galėsime atlikti veiksmus su daugiaženkliais skaičiais šešioliktainėje sistemoje, pavyzdžiui:

$$\begin{array}{r} 3A7B9 \\ +\ E0158 \\ \hline 11A911 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1247A \\ \times\ 185 \\ \hline 5B762 \\ 923D0 \\ 1247A \\ \hline 1BC7662 \end{array}$$

Pratimai

30. Dešimtainius skaičius 3 750 ir 3 982 išreikškite dvejetainėje sistemoje, pasinaudoję prieš tai gauta jų išraiška aštuonetainėje sistemoje.

31. Sudarykite visą šešioliktainės sistemos sudėties lentelę.

32. Sudarykite visą šešioliktainės sistemos daugybos lentelę.

33. Atlikite veiksmus šešioliktainėje sistemoje: a) 379B+ +2DE5; b) A256−9E8; c) 70A9×138; d) A178 : 102.

34. Dešimtainį skaičių 92608,34375 išreikškite dvejetainėje sistemoje, pritaikę prieš tai gautą jo išraišką šešioliktainėje sistemoje.

7. Aritmetiniai veiksmai elektroninėje skaičiavimo mašinoje. Šiuolaikinėse elektroninėse skaičiavimo mašinose yra elementų, turinčių dvi stabilias padėtis, todėl jos atlieka veiksmus tik dvejetainėje skaičiavimo sistemoje.

Kaip jau žinome iš 5 skyrelio, aritmetiniai veiksmai dvejetainėje sistemoje gana paprasti. Daugyba pakeičiama daugiklio poslinkiu ir sudėtimi. Dalyba atliekama, nuosekliai atimant, o atimtis pakeičiama sudėtimi su dvejetainiu papildiniu. Taigi pagrindinis veiksmas dvejetainėje skaičiavimo sistemoje yra dvejetainių skaičių sudėtis.

Todėl skaičiavimo mašinos aritmetinio įrenginio pagrindinis elementas yra daugiaskiltis *dvejetainis sumatorius,* sudedantis du dvejetainius skaičius. Kadangi daugiaženklių skaičių sudėtis pakeičiama vienaženklių skaičių sudėtimi, daugiaskiltis sumatorius gali būti sudarytas iš kelių vienos skilties sumatorių, kurių kiekvienas skirtas sudėti vieno skyriaus skaitmenims.

Vienos skilties dvejetainiame sumatoriuje turi būti trys įėjimai: į du įėjimus patenka dviejų dėmenų atitinkamų skyrių skaitmenys, o į trečiąjį — perkeliamas iš žemesniojo skyriaus vienetas, jei toks yra. Sumatoriuje turi būti du išėjimai: vienas jų — sumos duotajame skyriuje skaitmuo, antrasis — į aukštesnį skyrių perkeliamas vienetas.

Vienos skilties dvejetainius sumatorius galima sujungti į vieną daugiaskiltį. Atliekant operacijas dvejetainėje sistemoje, visi vienos skilties sumatoriai sujungiami vienodai, t. y. taip, kad vieno išėjimas — perkėlimas į aukštesnįjį skyrių sutaptų su kito įėjimu — perkėlimu iš žemesniojo skyriaus, kai pastarasis sumatorius yra gretimame (iš kairės) skyriuje pirmesniojo atžvilgiu.

Visi trys vienos skilties dvejetainio sumatoriaus įėjimai yra lygiateisiai, ir įėjimų reikšmės apibrėžiamos ne tuo, kas paduodama į vieną ar į kitą įėjimą, o bendru vienetų, paduotų į įėjimus, kiekiu. Sumatorius turi būti sukonstruotas taip, kad jis dirbtų pagal žemiau pateikiamą lentelę. Joje raidėmis A ir B pažymėti įėjimai, į kuriuos paduodami dėmenų skaitmenys, S reiškia sumos duotajame skyriuje skaitmenį, o Z_1 ir Z_2 — perkėlimai atitinkamai iš žemesniojo skyriaus į duotąjį ir iš duotojo skyriaus į aukštesnįjį.

Pirmoji lentelės eilutė atitinka aiškią lygybę $0+0+0=0$ ir jokių komentarų nereikalauja. Kitos trys lentelės eilutės jungia atvejus, kai tik į vieną įėjimą patenka vienetas. Tada suma duo-

Įėjimai			Išėjimai	
A	B	Z_1	S	Z_2
0	0	0	0	0
0	0	1		
0	1	0	1	0
1	0	0		
1	1	0		
1	0	1	0	1
1	1	0		
1	1	1	1	1

tajame skyriuje yra $S=1$, ir perkėlimo į aukštesnį skyrių nėra: $Z_2=0$. Jei į du įėjimus iš trijų paduodami vienetai, suma bus lygi 10, t. y. skaitmuo duotajame skyriuje bus $S=0$, ir atsiranda vienetas, kurį reikia perkelti. Šis atvejis atitinka tolimesnes tris lentelės eilutes. Pagaliau paskutinioji eilutė atitinka atvejį $1+1+1=11$, taigi $S=1$ ir $Z_2=1$.

Elektroninės schemos, kuriomis remiantis praktiškai galima dirbti pagal pateiktą lentelę, nėra labai sudėtingos. Vis dėlto jų nenagrinėsime, nes tai jau neturi nieko bendra su šiuo fakultatyviniu kursu.

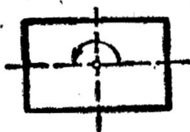
SIMETRIJA

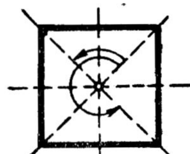
PLOKŠČIŲJŲ FIGŪRŲ SIMETRIJA

1. Plokštumos poslinkiai. Net ir visai nesidomintis geometrija žmogus pasakys, kad iš visų keturkampių kvadratas yra simetriškiausias. Tačiau ne kiekvienas sugebės paaiškinti, kodėl kvadratas yra simetriškesnis už stačiakampį, kurio kraštinės yra skirtingų ilgių. Geometras pasakytų, kad bet kokį stačiakampį galima sutapdinti su juo pačiu[1] tik keturiais būdais: tapačiu atvaizdavimu *E*, ašinėmis simetrijomis atžvilgiu tiesių, einančių per stačiakampio centrą — įstrižainių susikirtimo tašką ir statmenomis jo kraštinėms, ir, pagaliau, centrine simetrija centro atžvilgiu (1 pav.). O kvadratą galima sutapdinti su juo pačiu dar keturiais būdais — ašinėmis simetrijomis įstrižainių atžvilgiu ir 90° bei 270° posūkiais (2 pav.).

Taigi figūra laikoma tuo simetriškesne, kuo daugiau yra būdų ją sutapdinti su pačia, t. y. kuo daugiau yra poslinkių, kuriais ji atvaizduojama pati savyje.

Geometrijos pamokose jau išnagrinėjote tokius poslinkius: ašines simetrijas, lygiagrečiuosius postūmius ir posūkius. Priminsime, kad *ašinė simetrija* tiesės l atžvilgiu žymima S_l, *lygiagretusis postūmis,* arba kitaip, vektorius, žymimas $\vec{a}$, o *posūkis kampu* α apie tašką O žymimas R_O^α. Mokykloje nagrinėjami posūkiai tik kampais nuo 0° iki 180° laikrodžio rodyklės kryptimi ir prieš laikrodžio rodyklę. Šioje knygoje nagrinėsime posūkius bet kokiais kampais. Pirmiausia pažymėsime, kad, pasukus plokštumą 360° kampu apie kokį nors tašką O, visi jos taškai grįžta į pradinę padėtį. Todėl posūkius 360° kampu laikrodžio rodyklės kryptimi ir prieš laikrodžio rodyklę laikome tapačia transformacija,


1 pav.


2 pav.

[1] Tokiu atveju geometrijos vadovėliuose vartojamas terminas „atvaizduoti į jį patį". Tačiau dažnai plokštumos poslinkį parankiau traktuoti kaip fizinį poslinkį, kuriuo taškas „ne atvaizduojamas" į kitą, o atsiduria jame. Tuo tarpu apie tašką, kuris atvaizduojamas pats savyje (kurio vaizdas sutampa su pirmvaizdžiu) sakoma, kad šis taškas poslinkio metu nejuda.

t. y. $R_O^{+360°}=E$. Jei iš pradžių atliktume posūkį kampu α, o paskui 360° kampu, gautume posūkį $\alpha+360°$. Po tokio posūkio kiekvienas taškas atsiduria ten pat, kur jis būna po posūkio kampu α. Todėl $R_O^{\alpha+360°}=R_O^{\alpha}$.

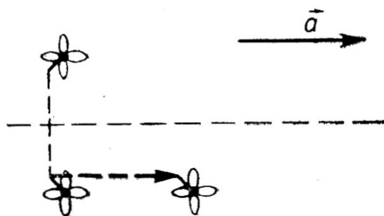
Pavyzdžiui, $R_O^{805°}=R_O^{445°}=R_O^{85°}$, o $R_O^{-295°}=R_O^{65°}$. Kadangi bet kokį laipsnių skaičių galima išreikšti suma $360°\,n+\alpha$ (n — sveikasis skaičius, ir $-180°<\alpha\leqslant 180°$), tai bet kokį posūkį apie tašką O galima išreikšti kaip R_O^{α}; čia $-180°<\alpha\leqslant 180°$.

Priminsime, kad kryptis prieš laikrodžio rodyklę laikoma teigiama, o pagal laikrodžio rodyklę — neigiama. Pavyzdžiui, $R_O^{-30°}$ — posūkis 30° kampu laikrodžio rodyklės kryptimi apie tašką O.

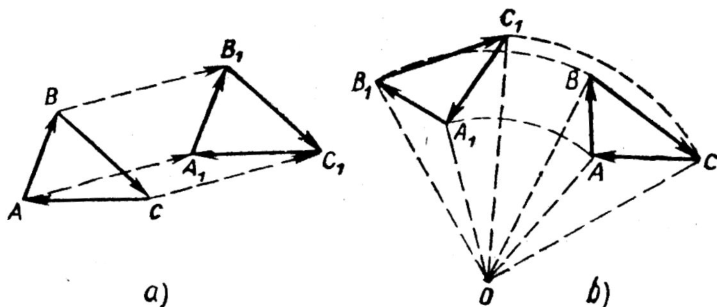
Paminėsime dar vieną poslinkių rūšį. Šie poslinkiai gaunami taip: paimame bet kurią tiesę a ir lygiagretų jai vektorių $\vec{a}$. Tada iš pradžių atliekame ašinę simetriją S_a, o paskui lygiagretųjį postūmį $\vec{a}$ (3 pav.). Gauname plokštumos poslinkį, kuris vadinamas *slenkamąja simetrija* ir žymimas $S_a^{\vec{a}}$. Nesunku patikrinti, kad tokį pat poslinkį gauname, kai iš pradžių atliekame lygiagretųjį postūmį $\vec{a}$, o paskui — simetriją S_a. Galima įrodyti, kad kitokių plokštumos poslinkių, išskyrus išvardytus, nėra. Tapati transformacija E yra tiek lygiagrečiųjų postūmių (vektoriumi $\vec{0}$), tiek ir posūkių (nuliniu kampu) atskiras atvejis.

Kokios rūšies yra plokštumos poslinkis, galima atskirti pagal du pagrindinius požymius: pagal nejudamųjų taškų aibę ir pagal tai, ar kinta apėjimo kryptis (orientacija). Ir po lygiagrečiojo postūmio, ir po posūkio trikampių apėjimo kryptis lieka nepakitusi: jei koks nors trikampis buvo apeinamas laikrodžio rodyklės kryptimi, tai trikampis, gautas šiomis transformacijomis, bus tokios pat orientacijos (4 pav.). Tačiau visi taškai, gauti nenuliniu lygiagrečiuoju postūmiu, pakeičia savo padėtį, o tarp taškų, gautų nenuliniu posūkiu, yra vienas nejudamasis taškas — posūkio centras. Dar pabrėšime, kad kiekvienas spindulys lygiagrečiaisiais postūmiais atvaizduojamas į vienakryptį spindulį, o posūkiu kampu α — į spindulį, sudarantį su duotuoju spinduliu kampą α (5 pav.).

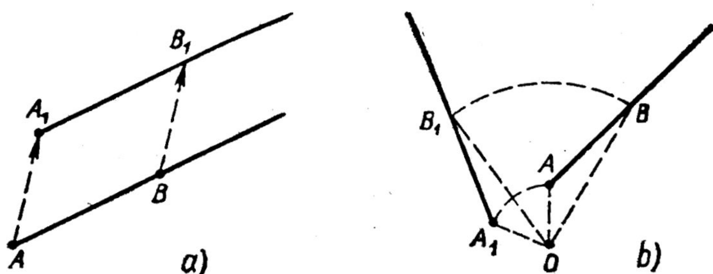
Ašinė ir slenkamoji simetrija bet kurio trikampio apėjimo kryptį pakeičia į priešingą. Trikampis ABC (6 pav.) yra orientuotas prieš laikrodžio rodyklę, o ašine simetrija gautas trikampis $A_1B_1C_1$ jau yra orientuotas laikrodžio ro-



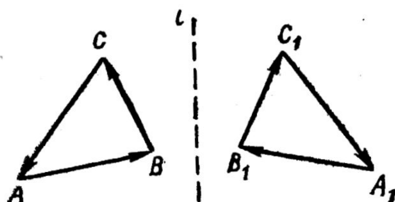
3 pav.



4 pav.



5 pav.



6 pav.

dyklės kryptimi. Slenkamoji simetrija neturi nejudančių taškų, o ašinė simetrija turi ištisą tiesę, sudarytą iš nejudančių taškų — simetrijos ašį.

Visus tyrimo rezultatus galima apibendrinti tokioje lentelėje:

Transformacijos rūšis	Nejudančių taškų aibė	Orientacija
Nenulinis lygiagretusis postūmis	Tuščia	Nekinta
Nenulinis posūkis	Vienas taškas	Nekinta
Ašinė simetrija	Tiesė	Keičiasi į priešingą
Slenkamoji simetrija	Tuščia	Keičiasi į priešingą
Tapati transformacija	Visa plokštuma	Nekinta

Pratimai

1. Pažymėkite tris plokštumos taškus A, B ir O. Paimkite kokį nors tašką M ir raskite jo vaizdą T, gautą lygiagrečiuoju postūmiu, kuris tašką A atvaizduoja į tašką B. Po to tašką T pasukite -45° kampu apie tašką O.

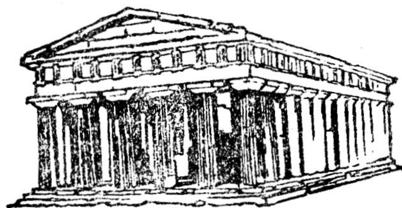
2. Nubrėžkite tiesę a ir parinkite vektorių $\vec{a}$, lygiagretų šiai tiesei. Nubraižykite bet kokią figūrą ir raskite jos vaizdus, gautus:

a) lygiagrečiuoju postūmiu $\vec{a}$;
b) ašine simetrija tiesės a atžvilgiu;
c) slenkamąja simetrija $S_a^{\vec{a}}$.

3. Įrodykite, kad slenkamosios simetrijos $s_a^{\vec{a}}$ dvigubas taikymas yra ekvivalentus lygiagrečiajam postūmiui $2\vec{a}$.

4. Įrodykite, kad, atlikus iš pradžių lygiagretųjį postūmį, o paskui posūkį kampu α apie tašką O, gaunamas posūkis kampu α apie tam tikrą tašką O_1.

5. Įrodykite, kad trijų nuosekliai atliktų ašinių simetrijų rezultatas yra arba ašinė, arba slenkamoji simetrija.



7 pav.

2. Figūrų simetrijos. Graikiškas žodis „symmetria", išvertus į lietuvių kalbą, reiškia „darna". Senovėje simetriškomis buvo vadinamos figūros, turinčios simetrijos ašį arba centrą. Daug architektūrinių statinių stebina mus savo simetriškumu, pavyzdžiui Egipto piramidės, Atėnų Partenonas (7 pav.), Maskvos Kremliaus bokštai, o iš šiuolaikinių — Ekonominės Savitarpio Pagalbos Tarybos rūmai Maskvoje (8 pav.). Tiesa, yra asimetriškų, tačiau puikių statinių, pavyzdžiui Vasilijaus Palaimintojo cerkvė Maskvoje (9 pav.). Tačiau paprastai simetrijos laikomasi ir statant namus, planuojant parkus ir t. t. Pavyz-



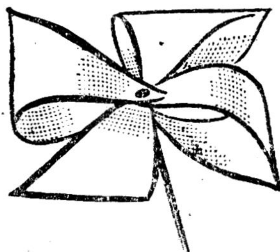
8 pav.

džiui, besisukančios mašinų dalys yra simetriškos centro atžvilgiu, be to, sukimosi ašis eina per simetrijos centrą. Tuomet jėgos, atsirandančios sukimosi metu, būna pusiausviros.



9 pav.

Be ašinės ir centrinės simetrijos, yra dar ir kitokių rūšių simetrijų. Pavyzdžiui, pasukę 90° kampu vėjo malūnėlį, pavaizduotą 10 paveiksle, sutapdintume jį su savimi. Sakoma, kad suktukas turi sukamąją simetriją. Pavyzdžiui, juostelė (11 pav.) lygiagrečiaisiais postūmiais atvaizduojama į tą pačią juostelę (aišku, jei tartume, kad juostelė be galo tęsiasi į abi puses).



10 pav.

Įvesime bendrą simetrijos sąvoką: **figūros simetrijomis vadinsime visus poslinkius, kurie šią figūrą atvaizduoja į ją pačią** (taip pat kalbama apie figūros sutapdinimą su ja pačia). Pavyzdžiui, stačiakampis, kurio kraštinių ilgiai skirtingi, turi tik keturias simetrijas, o kvadratas — 8 simetrijas. Yra figūrų, turinčių be galo daug simetrijų: pavyzdžiui, apskritimas bet kokiu posūkiu apie centrą ir bet kuria simetrija atžvilgiu tiesių, einančių per centrą, atvaizduojamas į tą patį apskritimą, o visa plokštuma bet kokiais poslinkiais atvaizduojama į ją pačią. Kaip jau minėjome, kuo turtingesnė yra figūros simetrijų aibė, tuo ji yra simetriškesnė.



11 pav.

Simetrija turi didelę reikšmę ir matematikoje, ir fizikoje (ypač kristalografijoje ir kvantinėje mechanikoje), ir mene. Žinomas vokiečių mokslininkas H. Veilis, parašęs apie simetriją net knygą, yra pasakęs: „Simetrija — plačiąja arba siaurąja prasme priklausomai nuo to, kaip jūs apibrėžiate šią sąvoką,— yra toji idėja, kurią pasitelkęs žmogus per daugelį šimtmečių bandė suvokti ir sukurti tvarką, grožį ir tobulumą“.

6. Kiek simetrijų turi kiekviena abėcėlės didžioji raidė, pavaizduota 12 paveiksle?

7. Kiek simetrijų turi kiekvienas skaitmuo (13 pav.)? Parašykite visus dviženklius skaičius, kurie turi simetrijų, nesutampančių su tapačia transformacija. Ar būtina, kad tokias simetrijas turėtų skaitmenys, iš kurių sudarytas skaičius?

8. Raskite simetrijų aibę šių figūrų:

a) penkiakampės žvaigždės;

b) roželių, pavaizduotų 14 paveiksle;

c) gardelių, kurias sudaro koordinačių plokštumos tiesės, apibrėžtos lygtimis $x=m$, $y=n$; čia m ir n — sveikieji skaičiai.

9. Parašykite didžiosiomis raidėmis keletą žodžių, turinčių:

a) horizontalią simetrijos ašį;

b) vertikalią simetrijos ašį;

c) dvi simetrijos ašis;

d) simetrijos centrą.

10. Kai figūra Φ turi dvi statmenas simetrijos ašis, jų susikirtimo taškas yra figūros simetrijos centras. Įrodykite.

11. Raskite visas simetrijas šių figūrų: a) atkarpos; b) spindulio; c) tiesės; d) skritulinio žiedo, apriboto dviem koncentriškais apskritimais; e) figūros, kurią sudaro du kongruentūs, liečiantys vienas kitą apskritimai; f) figūros, kurią sudaro du kvadratai, turintys bendrą kraštinę.

12. Sugalvokite figūrą, turinčią lygiai 3 simetrijas (įskaitant E).

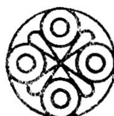
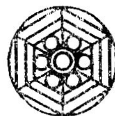
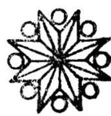
P r a k t i n ė   u ž d u o t i s. Savo draugams arba tėvams (o iš pradžių patys sau) pademonstruokite tokį pokštą. Pripilkite pilną mėgintuvėlį švaraus vandens, užkimškite kamščiu ir padėkite jį horizontaliai virš žodžių, pavaizduotų 15 paveiksle. Paaiškinkite, kodėl taip išėjo?

AEUOTKNB

12 pav.

123456789

13 pav.

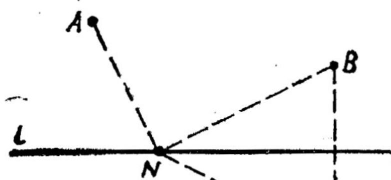
14 pav.

SPORTAS HOBI

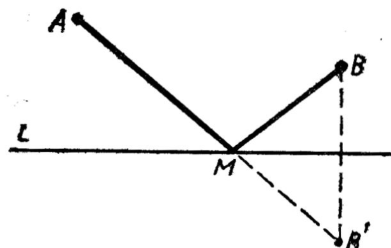
15 pav.

3. Simetrijos ir geometriniai uždaviniai. Sprendžiant įvairius brėžimo uždavinius, dažnai vartojama simetrijos sąvoka. Pateiksime keletą pavyzdžių.

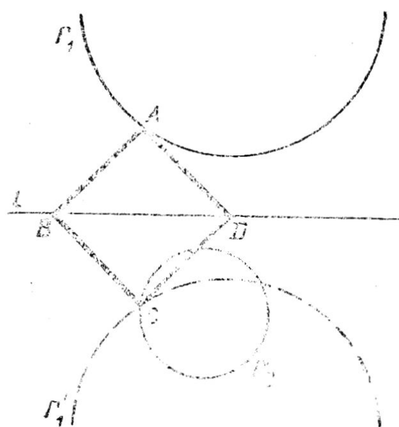
1 p a v y z d y s. Raskite tiesės l tašką M, kurio atstumų nuo dviejų taškų A ir B, esančių šalia tiesės, suma būtų mažiausia.



16 pav.



17 pav.

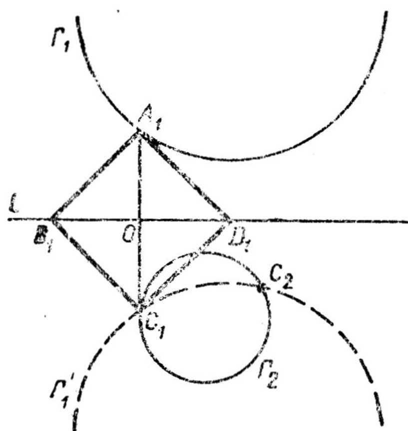

18 pav.

Kai taškai A ir B yra skirtingose tiesės pusėse, sprendimas aiškus savaime: reikia nubrėžti atkarpą AB ir rasti šios atkarpos ir tiesės l susikirtimo tašką M. Dabar tarkime, kad taškai A ir B yra vienoje tiesės l pusėje. Pažymėkime tašką B', simetrišką taškui B tiesės l atžvilgiu. Kokį beparinktume tiesės l tašką N, visuomet $|NB|=|NB'|$ (16 pav.). Todėl, kai $|AN|+|NB|$ įgyja mažiausią reikšmę, tai ir $|AN|+|NB'|$ taip pat įgyja mažiausią reikšmę. Dabar aišku, kaip išspręsti uždavinį. Reikia rasti tašką B', simetrišką taškui B tiesės l atžvilgiu, tašką B' sujungti su tašku A ir rasti (AB') ir susikirtimo tašką M (17 pav.).

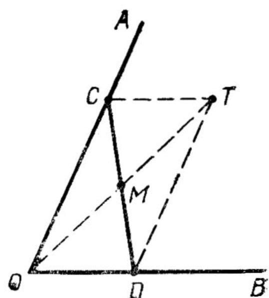
2 pavyzdys. Nubraižykite kvadratą, kurio dvi priešingos viršūnės yra duotoje tiesėje l, o dvi kitos priklauso dviem duotiesiems apskritimams Γ_1 ir Γ_2.

Tarkime, kad uždavinys išspręstas, ir $ABCD$ — kvadratas, kurį nubraižėme (18 pav.). Kadangi priešingos kvadrato viršūnės yra simetriškos atžvilgiu tiesės, einančios per kitas dvi viršūnes, taškai A ir C yra simetriški tiesės l atžvilgiu. Bet taškas A priklauso apskritimui Γ_1, todėl simetriškas jam taškas C turi priklausyti apskritimui Γ', simetriškam Γ_1 tiesės l atžvilgiu. Be to, šis taškas turi priklausyti ir apskritimui Γ_2, todėl jis turi priklausyti apskritimų Γ' ir Γ_2 sankirtai.

Iš šios analizės išplaukia toks brėžimo būdas. Nubraižome apskritimą Γ', simetrišką apskritimui Γ_1 tiesės l atžvilgiu, ir pažymime apskritimų Γ' ir Γ_2 susikirtimo taškus C_1 ir C_2. Toliau randame apskritimo Γ_1 tašką A_1, simetrišką taškui C_1 tiesės l atžvilgiu. Tarkime, kad $O=C_1A_1 \cap l$. Tiesėje l atidedame atkarpas OB_1 ir OD_1, kongruenčias atkarpai OC_1 (19 pav.). Nesunku pa-



19 pav.



20 pav.

tikrinti, kad $A_1B_1C_1D_1$ — kvadratas, tenkinantis uždavinio sąlygą. Antrąjį kvadratą gautume, vietoje taško C_1 paėmę C_2 ir toliau pakartoję sprendimą. Paliekame skaitytojui ištirti, kuriais atvejais gaunami du sprendiniai, kuriais — vienas, kuriais — nė vieno.

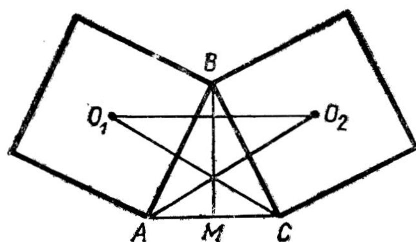
3 pavyzdys. Duotas kampas AOB ir jo viduje taškas M. Per tašką M nubrėžkite tiesę, kurios atkarpa, esanti tarp kampo kraštinių, taške M dalytųsi pusiau.

Tarkime, kad uždavinys jau išspręstas ir CD — ieškomoji tiesė (20 pav.). Tuomet taškai C ir D yra simetriški vienas kitam taško M atžvilgiu. Jei taškas T yra simetriškas taškui O taško M atžvilgiu, tai $OCTD$ — lygiagretainis, ir todėl $TD \| OA$, $TC \| OB$. Vadinasi, norėdami išspręsti uždavinį, turime rasti tašką T, simetrišką taškui O taško M atžvilgiu, ir per tašką T nubrėžti tieses TC ir TD, lygiagrečias kampo kraštinėms. Tiesių TC ir OA bei TD ir OB susikirtimo taškai ir bus ieškomojoje tiesėje (20 pav.). Suprantama, užtenka rasti vieną tašką (C arba D), nes vieną tiesės tašką M — jau turime.

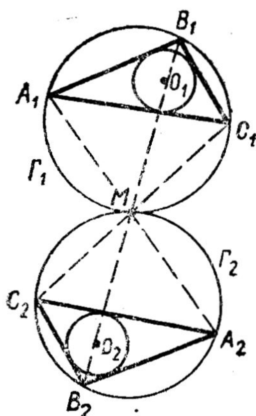
Simetrija taikoma ne tik sprendžiant uždavinius, bet ir įrodant teoremas.

4 pavyzdys. Ant lygiašonio trikampio ABC kongruenčių kraštinių AB ir BC nubraižyti kvadratai, kurių centrai yra taškuose O_1 ir O_2 (21 pav.). Įrodykite, kad: a) tiesių AO_2 ir CO_1 susikirtimo taškas priklauso trikampio kampo pusiaukampinei BM; b) tiesė O_1O_2 yra statmena pusiaukampinei BM; c) $|AO_2| = |CO_1|$.

Iš tiesų, kampo B pusiaukampinė yra lygiašonio trikampio ABC simetrijos ašis. Nubraižę ant kraštinių AB ir BC kvadratus ir pažymėję jų centrus, simetrijos nepažeidėme. Todėl taškai O_1 ir O_2 simetriški pusiaukampinės BM atžvilgiu. Iš to išplaukia, kad simetrija tiesės BM atžvilgiu taškas O_1 atvaizduojamas į tašką O_2, o taškas C — į tašką A, ir todėl tiesė O_1C — į tiesę O_2A.



21 pav.



22 pav.

Bet tuomet šių tiesių susikirtimo taškas turi būti nejudantis, t. y. priklausyti pusiaukampinei BM. Be to, atkarpa O_1O_2, jungianti simetriškus taškus, yra statmena simetrijos ašiai BM. Pagaliau, šia simetrija atkarpos O_1C ir O_2A atvaizduojamos viena į kitą, ir todėl $|O_1C| = |O_2A|$.

5 pavyzdys. Apskritimai Γ_1 ir Γ_2 yra kongruentūs ir liečiasi taške M. Trys tiesės, einančios per tašką M, kerta apskritimą Γ_1 taškuose A_1, B_1 ir C_1, o apskritimą Γ_2 — taškuose A_2, B_2 ir C_2. Apskritimų, įbrėžtų į trikampius $A_1B_1C_1$ ir $A_2B_2C_2$ centrus pažymėsime O_1 ir O_2. Įrodykite, kad tiesė O_1O_2 eina per tašką M (22 pav.).

Iš tiesų, apskritimai Γ_1 ir Γ_2 yra simetriški taško M atžvilgiu, nes jie yra kongruentūs ir šiame taške liečia vienas kitą. Šia centrine simetrija taškai A_1, B_1, C_1 atvaizduojami į taškus A_2, B_2, C_2. Vadinasi, trikampio $A_1B_1C_1$ centras O_1 yra simetriškas trikampio $A_2B_2C_2$ centrui O_2 atžvilgiu M, o todėl atkarpa O_1O_2 eina per tašką M.

Pratimai

13. Ant lygiašonės trapecijos $ABCD$ kongruenčių kraštinių jos išorėje nubraižyti lygiakraščiai trikampiai ADM ir BCN. Įrodykite, kad

a) $|MB| = |NA|$, $|MC| = |ND|$; b) $MN \parallel AB$.

14. Per lygiašonės trapecijos $ABCD$ didesniojo pagrindo galus A ir B nubrėžtos dvi tiesės AT ir BT, kurios su pagrindu AB sudaro kongruenčius kampus TAB ir TBA; taškas T sujungtas su trapecijos įstrižainių susikirtimo tašku E. Įrodykite, kad tiesė ET:

a) eina per tašką, kuriame susikerta trapecijos šoninių kraštinių tęsiniai;

b) dalija trapecijos pagrindus pusiau;

c) yra statmena trapecijos pagrindams.

15. Tarkime, kad E — lygiašonės trapecijos $ABCD$ įstrižainių susikirtimo taškas, AD ir BC — jos šoninės kraštinės. Įrodykite, kad trikampiai ADE ir BCE yra kongruentūs.

16. Dviejų apskritimų susikirtimo taškai M ir N sujungti su bet kuriuo jų centrų tiesės tašku T. Įrodykite, kad atkarpos MT ir NT yra kongruenčios ir su centrų tiese sudaro kongruenčius kampus.

17. Apskritimo centras O priklauso kampo ABC pusiaukampinei, be to, apskritimas kerta kampo kraštines. Įrodykite, kad

a) stygos MN ir PT, kurias apskritimas atkerta kampo kraštinėse, yra kongruenčios;

b) stygos MP ir NT yra lygiagrečios, o stygos MT ir NP yra kongruenčios (arba, atvirkščiai, stygos MT ir NP lygiagrečios, o stygos MP ir NT yra kongruenčios).

18. Iš taško T, priklausančio dviejų apskritimų centrų tiesei, nubrėžtos pirmojo apskritimo liestinės TA ir TB ir antrojo apskritimo liestinės TC, TD (čia A, B, C, D — lietimosi taškai). Įrodykite, kad tiesės AC ir BD, kaip ir tiesės AD ir BC, kertasi centrų tiesėje.

19. Plokštumoje nubraižytas kampas ABC ir tiesė l. Nubraižykite kvadratą taip, kad dvi priešingos kvadrato viršūnės būtų tiesėje l, o dvi kitos priklausytų kampo ABC kraštinėms.

20. Duota tiesė l ir du apskritimai vienoje jos pusėje. Raskite tiesės tašką T, iš kurio nubrėžtos duotųjų apskritimų liestinės TA ir TB su tiese l sudarytų kongruenčius kampus.

21. Nubraižykite keturkampį $ABCD$, kurio įstrižainė AC būtų kampo A pusiaukampinė, kai žinomi jo kraštinių ilgiai.

22. Ant stačiakampio biliardo stalo $ABCD$ guli du rutuliai M ir N. Kaip reikia pastumti rutulį N, kad jis, nuosekliai atsimušęs nuo visų biliardo sienelių, pataikytų į rutulį M?

23. Duotas kampas ABC ir jo viduje pažymėtas taškas P. Nubraižykite mažiausio perimetro trikampį, kurio viena viršūnė sutaptų su tašku P, o dvi kitos priklausytų duotojo kampo kraštinėms.

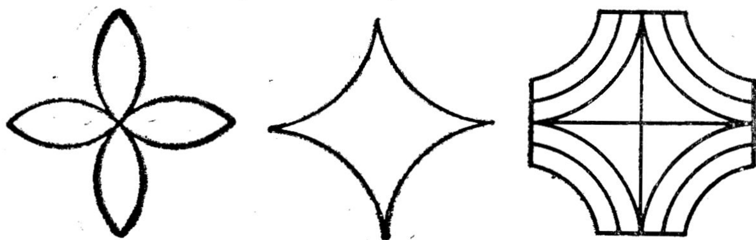
24. Į duotąjį smailųjį trikampį įbrėžkite mažiausio perimetro trikampį.

25. Tarkime, kad $ABCD$ — lygiagretainis, A_1, B_1, C_1, D_1 — taškai jo kraštinių tęsiniuose, kurie parinkti taip, kad B yra atkarpos AA_1 vidurio taškas, C — atkarpos BB_1 vidurio taškas, D — atkarpos CC_1 vidurio taškas ir A — atkarpos DD_1 vidurio taškas. Įrodykite, kad keturkampis $A_1B_1C_1D_1$ — lygiagretainis.

26. Lygiagretainis $A_1B_1C_1D_1$ yra įbrėžtas į lygiagretainį $ABCD$. Įrodykite, kad šių lygiagretainių centrai sutampa.

27. Keturkampis $ABCD$ — lygiagretainis, P ir T — apibrėžtų apie trikampius ABC ir CDA apskritimų centrai. Įrodykite, kad $[PB] \cong [TD]$ ir $[PD] \cong [TB]$.

28. Įrodykite, kad joks daugiakampis neturi simetrijos centro, kai jo kraštinių skaičius yra nelyginis.



23 pav.

29. Tarkime, kad tiesė l, kertanti kongruenčius apskritimus, dalija pusiau atkarpą O_1O_2; čia O_1 ir O_2 — apskritimų centrai. Įrodykite, kad apskritimai iš šios tiesės iškerta kongruenčias stygas.

30. Per apskritimų susikirtimo tašką B nubrėžkite tiesę taip, kad šie apskritimai iš jos iškirstų kongruenčias stygas.

4. Simetrijos ir figūrų klasifikacija. Figūros, pavaizduotos 23 paveiksle, yra skirtingos. Tačiau visos jos turi vieną ir tą pačią simetrijų aibę: jos turi tokias pat simetrijas, kokias turi kvadratas (tapačią transformaciją E, keturias ašines simetrijas, centrinę simetriją ir du posūkius). Jei sutapdintume dviejų tokių figūrų centrus ir simetrijos ašis, bet kuri transformacija, atvaizduojanti vieną šių figūrą į ją pačią, ir kitą figūrą atvaizduos į ją pačią. Sakoma, kad tokios dvi figūros priklauso vienai ir tai pačiai *simetrijos klasei.*

Vienai ir tai pačiai simetrijos klasei priklauso stačiakampis ir rombas (24 pav.), penkiakampė žvaigždė ir taisyklingasis penkiakampis (25 pav.), apskritimas ir skritulinis žiedas (26 pav.). Suprantama, dvi kongruenčios figūros visada priklauso vienai ir tai pačiai simetrijos klasei, t. y. simetrijos klasė — figūros geometrinė savybė.

Iš V klasės matematikos kurso žinomas *trikampių* aibės skirstymas (į įvairiakraščius, lygiašonius, bet ne lygiakraščius, ir į lygiakraščius) atitinka šios aibės skirstymą į simetrijos klases.

Įvairiakraščių trikampių simetrijų aibę sudaro tik vienas elementas — tapačioji transformacija E. Be to, lygiašoniai, bet nelygiakraščiai trikampiai turi vieną ašinę simetriją aukštinės [1], nuleistos į pagrindą, atžvilgiu (27 pav.). O lygiakraščiai trikampiai turi po šešias simetrijas: tapačiąją transformaciją E, tris ašines simetrijas aukštinių atžvilgiu ir du posūkius $R_O^{120°}$ ir R_O^{-120}; čia O — trikampio centras, t. y. šių aukštinių susikirtimo taškas (28 pav.).

---

[1] Trumpumo dėlei vietoj „ašinė simetrija tiesės, kurioje yra aukštinė (arba pusiaukampinė), atžvilgiu" sakysime „ašinė simetrija aukštinės (arba pusiaukampinės) atžvilgiu".

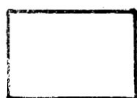
Nesunku įsitikinti, kad minėtosios transformacijos kiekvieną nagrinėjamą trikampį atvaizduoja į jį patį. Šiek tiek sunkiau įrodyti, kad kitokių poslinkių, turinčių tą pačią savybę, nėra. Norėdami tai padaryti, turėsime remtis šiais aiškiais teiginiais (pateikiame juos be įrodymo):

a) **daugiakampio viršūnės bet kokiu poslinkiu atvaizduojamos į jo vaizdo viršūnes, o kraštinės — į vaizdo kraštines;**

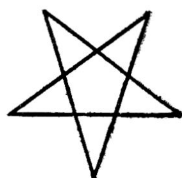
b) **kai taškai A, B, C nėra vienoje tiesėje ir $|A_1B_1|=|AB|$, $|A_1C_1|=|AC|$, $|B_1C_1|=|BC|$, egzistuoja vienintelis poslinkis f ir toks, kad $f(A)=A_1$, $f(B)=B_1$, $f(C)=C_1$.**

Iš a) teiginio išplaukia, kad tuomet, kai poslinkis f atvaizduoja *įvairiakraštį* trikampį ABC į jį patį, tai tiek jo ilgiausia kraštinė (sakykime, kraštinė AB), tiek vidurinė pagal ilgį kraštinė (pavyzdžiui, BC), tiek ir trumpiausioji kraštinė (t. y. AC) atvaizduojamos į tas pačias kraštines. Iš to išplaukia, kad poslinkis f visas viršūnes palieka vietoje. Bet iš b) išplaukia, kad bet koks poslinkis, kuris palieka vietoje tris plokštumos taškus, nepriklausančius vienai tiesei, yra tapačioji transformacija. Todėl įvairiakraštis trikampis neturi jokių kitų simetrijų, išskyrus E.

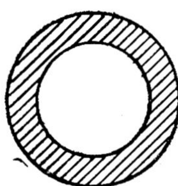
Kai ABC — *lygiašonis,* bet nelygiakraštis trikampis, t. y., kai, pavyzdžiui, $|AB|=|BC|$ ir $|AB|\neq|AC|$, kokia bebūtų simetrija, taškas B turi nejudėti, o taškai A ir C turi arba nejudėti, arba susikeisti vietomis. Pirmasis teiginys bus teisingas, kai E — tapačioji transformaci-



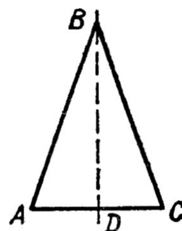
24 pav.



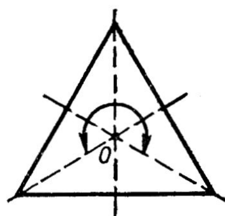
25 pav.



26 pav.



27 pav.



28 pav.

ja, o antrasis — kai f yra simetrija aukštinės BD atžvilgiu (žr. 27 pav.). Todėl iš b) teiginio išplaukia, kad f sutampa arba su E, arba su S_l.

Dar liko įrodyti, kad *lygiakraštis* trikampis ABC neturi jokių kitų simetrijų, išskyrus tas, kurias išnagrinėjome. Bet tai išplaukia iš to, kad trikampio viršūnės bet kokia simetrija atvaizduojamos į to paties trikampio viršūnes, o taškus A, B ir C galima sukeisti vieną su kitu tik šešiais skirtingais būdais:

$A \to A$	$A \to B$	$A \to A$	$A \to C$	$A \to B$	$A \to C$
$B \to B$	$B \to A$	$B \to C$	$B \to B$	$B \to C$	$C \to B$
$C \to C$	$C \to C$	$C \to B$	$C \to B$	$C \to A$	$B \to A$

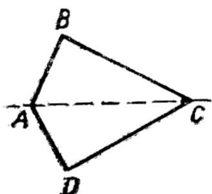
Dabar išnagrinėkime keturkampių simetrijos klases. Kai keturkampis neturi vienodo ilgio kraštinių, tai, kaip ir įvairiakraštis trikampis, jis turi tik vieną simetriją — tapačiąją transformaciją. Tarkime, kad jis turi dvi kongruenčias gretimas kraštines, pavyzdžiui AB ir AD. Tuomet, atlikus simetriją kampo BAD pusiaukampinės l atžvilgiu, taškas A liks vietoje, o taškai B ir D susikeis vietomis. Taigi, norint, kad ši transformacija būtų keturkampio simetrija, reikia, kad taškas C nejudėtų, t. y. priklausytų simetrijos ašiai l. Bet tuomet kraštinės CB ir CD taip pat yra kongruenčios. Toks keturkampis pavaizduotas 29 paveiksle; jis vadinamas *deltoidu*. Kai $|AB| \neq |CD|$, kitokių simetrijų jis neturi, vadinasi, jo simetrijų aibę sudaro dvi transformacijos — E ir simetrija S_l įstrižainės AC atžvilgiu. Tokią pat simetrijų aibę turi keturkampis, kuris gaunamas iš deltoido, simetriškai atvaizdavus kraštines AB ir AD įstrižainės BD atžvilgiu (30 pav.).

Kai deltoido visos kraštinės yra vienodo ilgio, jis vadinamas *rombu* (31 pav.). Rombo simetrijų aibę sudaro tapačioji transformacija E, dvi ašinės simetrijos įstrižainių atžvilgiu ir centrinė simetrija šių įstrižainių susikirtimo taško O atžvilgiu. Įrodysime, kad rombas neturi kitokių simetrijų, kai jo kampai nėra statieji. Iš tiesų, kai rombo $ABCD$ kampai A ir C yra smailieji, tai, atlikus bet kurią simetriją, viršūnė A arba lieka vietoje, arba atsiduria viršūnėje C. Be to, simetrija vienareikšmiškai priklauso nuo to, į kurią kraštinę bus atvaizduojama kraštinė AB. Kadangi rombas turi keturias kraštines, jo simetrijų aibę sudaro tik keturios transformacijos.

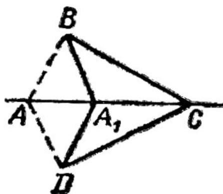
Išnagrinėkime atvejį, kai dvi priešingos keturkampio $ABCD$ kraštinės, pavyzdžiui BC ir AD, yra kongruenčios, o jokios dvi gretimos kraštinės nėra kongruenčios. Tuomet, be tapačiosios transformacijos E, keturkampis dar gali turėti simetrijų, kurios atkarpą BC atvaizduoja į atkarpą AD, o $[AD]$ — į $[BC]$. Čia galimi trys atvejai:

a) taškai, esantys vienoje keturkampio kraštinėje (t. y. taškai A ir B, C ir D), atsiduria vienas kitame;

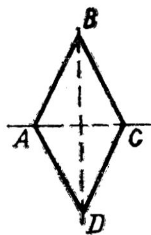
b) taškai, esantys vienoje keturkampio įstrižainėje (t. y. taškai A ir C, B ir D), atsiduria vienas kitame;



29 pav.



30 pav.



31 pav.

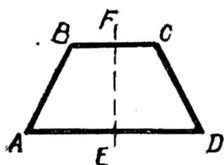
c) yra dviejų minėtų tipų simetrijos.

Pirmuoju a) atveju atkarpų AB ir CD vidurio taškai E ir F lieka vietoje. Bet tuomet nejudės ir visi tiesės EF taškai. Kadangi poslinkis nėra tapatusis, jis yra ašinė simetrija tiesės EF atžvilgiu. Taigi a) atveju keturkampis $ABCD$ turi simetrijos ašį EF. Toks keturkampis vadinamas *lygiašone trapecija* (32 pav.).

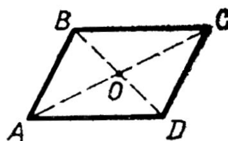
Antruoju b) atveju tiesės AC ir BD yra atvaizduojamos pačios į save, todėl šių tiesių susikirtimo taškas O nejuda. Be to, O — keturkampio $ABCD$ simetrijos centras. Taigi b) atveju keturkampis turi simetrijos centrą. Toks keturkampis vadinamas *lygiagretainiu* (33 pav.).

Pagaliau c) atveju gauname lygiagretainį, turintį simetrijos ašį. Toks lygiagretainis yra ne kas kita, o *stačiakampis*. Anksčiau minėjome, kad stačiakampio simetrijų aibę sudaro keturi poslinkiai: tapatusis, centrinė simetrija ir dvi ašinės simetrijos.

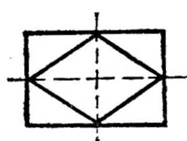
Tokias pačias simetrijas turi ir rombas. Kodėl taip yra, matyti 34 paveiksle: kiekvienas poslinkis, kuris stačiakampį atvaizduoja į jį patį, į tą stačiakampį įbrėžtą rombą taip pat atvaizduos į tą patį rombą, ir, atvirkščiai, kai poslinkis atvaizduoja rombą į jį patį, tai jis ir apibrėžtą apie rombą stačiakampį atvaiz-



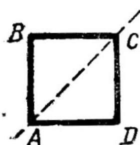
32 pav.

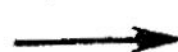
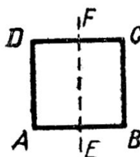


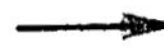
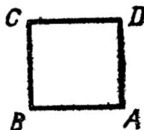
33 pav.



34 pav.



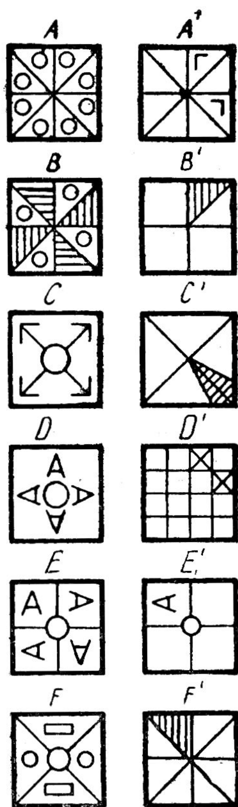



35 pav.

duos į tą patį stačiakampį. Beje, nors rombas turi tokias pat simetrijas, kaip ir stačiakampis, bet jo simetrijos ašys yra išdėstytos kitaip negu stačiakampio: jos jungia priešingas rombo viršūnes, o ne priešingų kraštinių vidurio taškus.

Kvadratas turi ir rombo, ir stačiakampio simetrijas. Tai iš karto duoda 6 simetrijas (tapačiąją transformaciją, centrinę simetriją, dvi ašines simetrijas įstrižainių atžvilgiu ir dvi ašines simetrijas atžvilgiu tiesių, jungiančių priešingųjų kraštinių vidurius). Bet jei iš pradžių atliktume simetriją įstrižainės AC atžvilgiu, o paskui tiesės EF atžvilgiu (35 pav.), nesunkiai suvoktume, kad tuomet viršūnė A atsidurtų viršūnėje B, viršūnė B — viršūnėje C, viršūnė C — viršūnėje D ir pagaliau viršūnė D — viršūnėje A. Gausime posūkį 90° kampu prieš laikrodžio rodyklę. Panašiu būdu gaunama dar viena simetrija — posūkis 90° kampu laikrodžio rodyklės kryptimi.

Parodysime, kad be šių aštuonių simetrijų jokių kitų simetrijų kvadratas neturi. Iš tikrųjų, kvadrato $ABCD$ viršūnė A gali atsidurti bet kurioje viršūnėje. Kai yra žinomas viršūnės A vaizdas, kraštinė AB gali būti atvaizduojama į bet kurią iš dviejų kraštinių, išeinančių iš šio vaizdo. Todėl kvadratas gali turėti iš viso $4 \cdot 2 = 8$ simetrijas.



36 pav.

Pratimai

31. Suskirstykite pagal simetrijos klases didžiąsias lietuvių abėcėlės, rusų abėcėlės raides, romėniškuosius ir arabiškuosius skaitmenis.

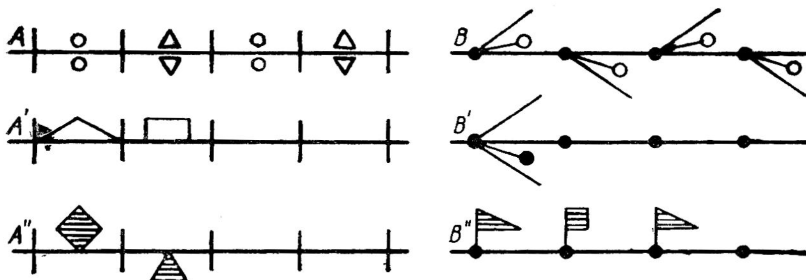
32. Raskite šešiakampių, kurių kraštinės tarpusavyje nesikerta, simetrijos klases.

33. Sugalvokite figūrą, kuri turėtų penkias simetrijas įskaitant E.

34. Išnagrinėję figūras A—F (36 pav.), pasakykite, kokioms simetrijos klasėms jos priklauso. Piešinius A'—F' papildykite taip, kad kiekviena figūra X' turėtų tą pačią simetrijos klasę, kokią turi figūra X.

35. Kiekvieną 37 paveikslo figūrą papildykite taip, kad gautume tos pačios simetrijos klasės ornamentą, koks yra virš kiekvienos figūros.

36. Sugalvokite figūrą, kitokią, negu lygiakraštis trikampis, bet priklausančią tai pačiai simetrijos klasei.



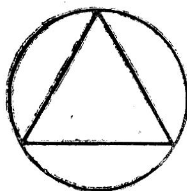
37 pav.

37. Plokštumoje nubraižyti du kongruentūs lygiakraščiai trikampiai Φ ir Φ_1. Kiek yra poslinkių, kurie trikampį Φ atvaizduotų į trikampį Φ_1?

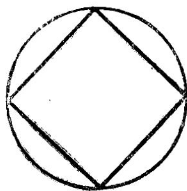
5. Taisyklingųjų daugiakampių simetrijos. Tarp visų trikampių simetriškiausi pasirodė besą lygiakraščiai trikampiai, o tarp keturkampių — kvadratai. Lygiakraščius trikampius galima gauti taip. Apskritimą padalykime į tris kongruenčias dalis. Sujungę dalijimo taškus, gausime lygiakraštį trikampį (38 pav.). Panašiai galime gauti kvadratą, padaliję apskritimą į keturias kongruenčias dalis ir sujungę dalijimo taškus (39 pav.).

Natūralu manyti, kad panašiu būdu galima gauti „patį simetriškiausią" tarp n-kampių: apskritimą reikia padalyti į n kongruenčių dalių ir paeiliui sujungti dalijimo taškus $A_1, \ldots, A_n, A_1$. Taip gautą uždarą laužtę pavadinsime *taisyklinguoju n-kampiu*[1] (40 pav.). Aišku, kad taisyklingasis n-kampis turi n viršūnių (dalijimo taškų) ir n kraštinių (jungiančių šias viršūnes stygų). Jei iš apskritimo centro nubrėžtume spindulius, einančius per gretimus dalijimo taškus, kampas tarp jų būtų lygus $\frac{360^\circ}{n}$. Tokį pat kampą sudaro spinduliai, nubrėžti iš centro O statmenai gretimoms taisyklingojo n-kampio kraštinėms (41 pav.).

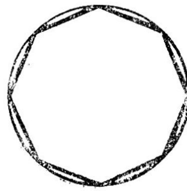
Rasime taisyklingojo n-kampio simetrijų aibę. Bet kokia simetrija viršūnių aibę atvaizduoja į ją pačią. Todėl nejuda tas taškas,



38 pav.

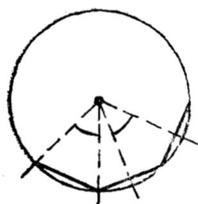


39 pav.



40 pav.

[1] Geometrijos vadovėlyje taisyklingasis n-kampis apibrėžiamas kitaip. Tačiau, nagrinėjant taisyklinguosius n-kampius, geriau vartoti šioje knygoje suformuluotą apibrėžimą.



41 pav.

kuris yra vienodai nutolęs nuo visų viršūnių, t. y. daugiakampio centras O. Dabar aišku, kad bet kokią taisyklingojo n-kampio simetriją vienareikšmiai apibrėžia dviejų gretimų viršūnių, pavyzdžiui A_0 ir A_1, vaizdai. Kai $f(A_0)=A_k$, kraštinė A_0A_1 atsiduria arba kraštinėje A_kA_{k+1}, arba kraštinėje A_kA_{k-1} (laikome, kad $A_{-1}=A_{n-1}$ ir $A_n=A_0$). Taigi įrodėmę, kad taisyklingojo n-kampio simetrijų aibė turi ne daugiau, kaip $2n$ transformacijų.

Rasime šias transformacijas. Norint viršūnę A_0 atvaizduoti į viršūnę A_k, o viršūnę A_1 — į viršūnę A_{k+1}, pakanka pasukti plokštumą apie tašką O $\frac{360°k}{n}$ kampu. Norint tašką A_0 atvaizduoti į A_k ir A_1 — į A_{k-1}, reikia dar atlikti ašinę simetriją tiesės OA_k atžvilgiu (šia simetrija taškas A_k paliekamas vietoje, o taškas A_{k+1} atsiduria taške A_{k-1}). Vietoj pastarosios galima atlikti tik simetriją kampo A_0OA_k pusiaukampinės atžvilgiu; tuomet taškas O liks vietoje, taškas A_0 atsidurs taške A_k, o taškas A_1 — taške A_{k-1}. Nesunku įrodyti, kad ir posūkis $\frac{360°k}{n}$ kampu apie tašką O, ir ašinė simetrija kampo A_0OA_k pusiaukampinės atžvilgiu atvaizduoja taisyklingąjį n-kampį į jį patį,— šios transformacijos apskritimą atvaizduoja į tą patį apskritimą, du dalijimo taškus atvaizduoja į du dalijimo taškus ir todėl visus kitus dalijimo taškus atvaizduoja į dalijimo taškus — juk apskritimą dalijome į kongruenčias dalis.

Taigi įrodėme, kad taisyklingojo n-kampio simetrijų aibė susideda iš $2n$ transformacijų: n posūkių ir n ašinių simetrijų. Ateityje šią aibę žymėsime D_n. Kai $n=2$, apskritimą reikia padalyti pusiau ir dalijimo taškus sujungti atkarpa, be to, norint, kad nubraižytas „dvikampis" būtų uždaras, reikia du kartus pirmyn ir atgal eiti skersmeniu, jungiančiu dalijimo taškus. Todėl aibę D_2 sudaro poslinkiai, kurie tokią „dvigubą atkarpą" sutapdina su ja pačia. Nesunku patikrinti, kad aibei D_2 priklauso keturi poslinkiai: tapačioji transformacija E, ašinės simetrijos atžvilgiu tiesės, kurioje yra dviguba atkarpa, ir atžvilgiu skersmens, nubrėžto šiai atkarpai per jos vidurį ir pagaliau centrinė simetrija dvigubos atkarpos vidurio taško atžvilgiu. Kai $n=1$, turime tik vieną dalijimo tašką A_0 ir reikia rasti poslinkius, kuriais apskritimas atvaizduojamas į jį patį, be to, taškas A_0 turi nejudėti. Aišku, kad D_1 sudaro tapačioji transformacija ir simetrija tiesės OA_0 atžvilgiu.

Pratimai

38. Įrodykite, kad taisyklingojo n-kampio visos kraštinės yra kongruenčios ir visi vidiniai kampai irgi yra kongruentūs.

39. Įrodykite, kad iškilasis daugiakampis yra taisyklingas, kai visos jo kraštinės yra kongruenčios ir visi kampai taip pat yra kongruentūs.

40. Apskaičiuokite taisyklingojo n-kampio priekampius.

41. Apskritimas padalytas į n kongruenčių dalių ir per dalijimo taškus nubrėžtos liestinės. Įrodykite, kad šios liestinės riboja taisyklingą *n-kampį*. Jis vadinamas apibrėžtu apie apskritimą.

42. Taisyklingojo n-kampio plotą išreikškite apibrėžtinio apskritimo spinduliu ir kraštinės ilgiu.

43. Taisyklingojo n-kampio plotą išreikškite įbrėžtinio apskritimo spinduliu ir kraštinės ilgiu.

44. Skriestuvu ir liniuote nubraižykite taisyklingą šešiakampį, taisyklingą 12-kampį, taisyklingą 8-kampį ir taisyklingą 16-kampį.

(Skriestuvu ir liniuote galima nubraižyti taisyklingą penkiakampį, taisyklingą 17-kampį ir taisyklingą 257-kampį. Galima įrodyti, kad skriestuvu ir liniuote negalima nubraižyti nei taisyklingojo septyniakampio, nei taisyklingojo devyniakampio.)

45. Plokštumoje parinkti taškai O ir A bei pažymėti visi taškai, kurie gaunami iš taško A posūkiu $\frac{360°k}{n}$ kampu ($k=0, 1, \ldots, n-1$) apie tašką O. Įrodykite, kad jie yra taisyklingojo n-kampio viršūnės.

46. Kiek įstrižainių turi taisyklingasis n-kampis?

47. Įrodykite, kad taisyklingaisiais šešiakampiais galima iškloti plokštumą.

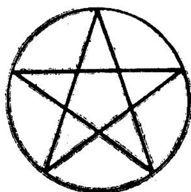
48. Įrodykite, kad plokštumą galima iškloti taisyklingaisiais aštuoniakampiais ir kvadratais, kurių kraštinių ilgis yra lygus aštuoniakampio kraštinių ilgiui.

49. Ar galima išgrįsti plokštumą taisyklingaisiais penkiakampiais? O taisyklingaisiais trikampiais?

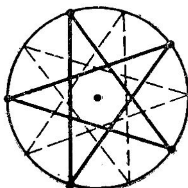
6*. Žvaigždiniai taisyklingieji daugiakampiai. Penkiakampę žvaigždę galima gauti taip. Padalijame apskritimą į penkias kongruenčias dalis ir kas antrą dalijimo tašką sujungiame (42 pav.). Lygiai taip pat galima nubraižyti ir kitokius *žvaigždinius* taisyklinguosius daugiakampius. Reikia pasirinkti du natūrinius skaičius n ir k ($k<n$), padalyti apskritimą į n kongruenčių dalių ir sujungti vieną su kitu dalijimo taškus, tarp kurių yra k apskritimo dalių (kai žvaigždė penkiakampė, $n=5$ ir $k=2$).

Jei apskritimą padalytume į 10 dalių ir paimtume $k=4$, vėl gautume penkiakampę žvaigždę. Kitą penkiakampę žvaigždę gautume, pradiniu tašku parinkę vieną iš likusiųjų dalijimo taškų (43 pav.). Šį kartą žvaigždinis daugiakampis išsiskaido į du. Jei paimtume $n=10$ ir $k=3$, gautume vieną taisyklingąjį žvaigždinį dešimtkampį (44 pav.). Šie atvejai skiriasi tuo, kad skaičiai 10 ir 4 turi bendrą, nelygų vienetui, daliklį 2, o skaičiai 10 ir 3 yra reliatyviai pirminiai. Apskritai teisingas toks teiginys:

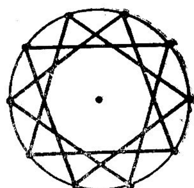
Kai natūriniai skaičiai n ir k yra reliatyviai pirminiai, atitinkamas žvaigždinis n-kampis nesiskaido: „išėję“ iš kurios nors jo



42 pav.



43 pav.

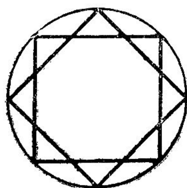


44 pav.

viršūnės ir „eidami“ kraštinėmis, grįšime atgal tik pabuvoję visose jo viršūnėse. **Kai n ir k turi nelygų vienetui bendrą didžiausią daliklį d, n-kampis išsiskaido į d taisyklingųjų m-kampių; čia $m=\frac{n}{d}$. Be to, kai $d=k$, šie daugiakampiai iškilieji, o kai $d<k$, jie yra žvaigždiniai.**

Tarkime, kad, išėję iš kurios nors viršūnės, grįšime į ją po s žingsnių. Tuomet skaičius sk turi dalytis iš n, $sk=nt$ (juk n dalių sudaro visą apskritimą). Aritmetikoje įrodoma, kad tuo atveju, kai n ir k yra reliatyviai pirminiai, sk dalijasi iš n tada ir tik tada, kai s dalijasi iš n. Mažiausia teigiama s reikšmė, turinti šią savybę, lygi n. Vadinasi, kai n ir k yra reliatyviai pirminiai, į pradinį tašką grįšime tik po n žingsnių, t. y. pabuvoję visose viršūnėse. Kai n ir k turi nelygų vienetui bendrą didžiausią daliklį d, tai $n=md$, $k=ld$ ir lygybę $sk=nt$ galima parašyti taip: $sld=mdt$. Iš to išplaukia, kad $sl=mt$, be to, skaičiai m ir t yra reliatyviai pirminiai. Mažiausia natūrinė s reikšmė, su kuria gali būti teisinga ši lygybė, yra lygi m. Vadinasi, į pradinį tašką grįšime po m žingsnių ir gausime m-kampį. Pradėję nuo kitų viršūnių, gausime kitus m-kampius. Jų skaičius lygus d. Pavyzdžiui, paėmę $n=8$, o $k=2$, gautume figūrą, sudarytą iš dviejų kvadratų, pasuktų vienas kito atžvilgiu 45° kampu (45 pav.).

Iš to, kaip braižėme taisyklinguosius žvaigždinius n-kampius, aišku, kad, pasukus apskritimą $\frac{360^\circ k}{n}$ kampu, šie daugiakampiai atvaizduojami į juos pačius. Analogiškai, kaip paprastiesiems taisyklingiesiems daugiakampiams, įrodoma, kad jie atvaizduojami patys į save ir simetrijomis atžvilgiu tiesių, einančių per apskritimo centrą ir per viršūnes A_k, $k=0, 1, \ldots, n-1$, arba per lankų, gaunamų, dalijant apskritimą į n kongruenčių dalių, vidurius. Kitokių simetrijų šie daugiakampiai neturi. Vadinasi, taisyklingojo žvaigždinio n-kampio simetrijų aibė sutampa su paprasto taisyklingojo n-kampio simetrijų aibe, t. y. su D_n.



45 pav.

Žvaigždiniai daugiakampiai dažnai naudojami ornamentuose, o penkiakampę žvaigždę (pentagramą) labai gerbė dar senovės babiloniečiai ir pitagoriečiai — senovės graikų filosofo ir matematiko Pitagoro, gyvenusio VI a.

pr. m. e., mokiniai. Gėtė pentagramą mini „Fausto“ scenoje, kai daktaras Faustas susitinka su Mefistofeliu. Mūsų šalyje raudona penkiakampė žvaigždė yra Tarybinės Armijos simbolis.

Pirmasis žvaigždinius daugiakampius tyrė anglų matematikas G. Bredverdainas (apie 1290—1349), paskui šiuos daugiakampius nagrinėjo vokiečių astronomas ir matematikas Johanas Kepleris (1571—1630).

Pratimai

50. Nubraižykite taisyklingus žvaigždinius daugiakampius, kai:

a) $n=8$, $k=5$;
b) $n=16$, $k=3$;
c) $n=16$, $k=5$;
d) $n=12$, $k=5$.

51. Įrodykite, kad skaičių poros (n, k) ir $(n, n-k)$ apibrėžia vienodus žvaigždinius daugiakampius.

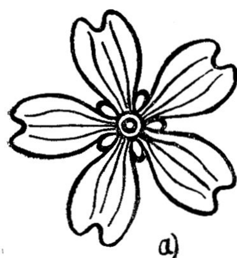
52. Tarkime, kad Φ — taisyklingasis n-kampis, kurio centras taške O. Pasukime jį $\frac{360°k}{nm}$ $(k=0, 1, \ldots, m-1)$ kampu apie tašką O ir paimkime visų gautųjų daugiakampių sąjungą. Įrodykite, kad šios sąjungos simetrijų aibė yra D_{nm}.

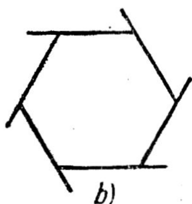
7. Rožėlės. Tokią pat simetrijų aibę, kaip ir taisyklingieji daugiakampiai, turi ir daugelis kitų geometrinių figūrų, taip pat gėlės, aktinijos, medūzos ir t. t. (46 pav., *a*). O figūros, pavaizduotos 46 paveiksle, *b*, simetrijų aibė yra skurdesnė: jai priklauso tik posūkiai, bet nepriklauso ašinės simetrijos.

Tokia simetrija technikoje pasitaiko tuomet, kai kokia nors mašinos detalė turi suktis tik tam tikra kryptimi, pavyzdžiui, turbinos rato detalė (47 pav.). Gyvojoje gamtoje tokia simetrija pasitaiko labai retai. Toliau simboliu Z_n žymėsime aibę, sudarytą iš posūkių apie fiksuotą tašką kampais $\frac{360°k}{n}$; čia $k=0, 1, \ldots, n-1$. Figūra, pavaizduota 46 paveiksle, b, priklauso simetrijos klasei Z_6, o pavaizduota 47 paveiksle — simetrijos klasei Z_{16}.

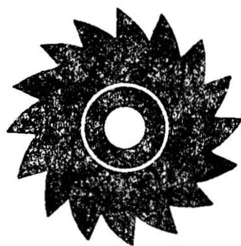
Jau išsiaiškinome, kad iš figūrų, turinčių simetrijos klasę D_n, tipiškiausia yra taisyklingasis n-kampis. Figūrų, turinčių simetrijos klasę Z_k, tipišku laikysime „malūnėlį“. Jis gaunamas iš taisyklingojo k-kampio, vienodai pratęsus visas jo kraštines kryptimi prieš laikrodžio rodyklę (46 pav., *b*).

Norėdami gauti figūras, kurios posūkiais $\frac{360°k}{n}$ kampu būtų atvaizduojamos į jas pačias, darome taip. Nubraižome kokią nors figūrą Ψ, parenkame tašką O ir figūrą, kuri gaunama pasukus Ψ apie tašką O $\frac{360°k}{n}$ kampu, pažymime Ψ_k; čia $k=0, \ldots, n-1$.





46 pav.

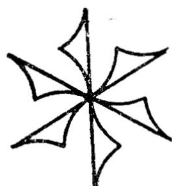


47 pav.

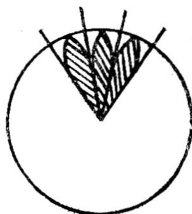
Pati figūra Ψ sutampa su Ψ_0. Tuomet figūra $\Phi = \bigcup_{k=0}^{n-1} \Psi_k$ (t. y. visų figūrų Ψ_k sąjunga; čia $k=0, 1, \ldots, n-1$) posūkiais, priklausančiais Z_n, bus atvaizduojama į ją pačią (48 pav.). Iš tiesų, posūkis $\frac{360°k}{n}$ kampu figūrą $\Psi=\Psi_0$ atvaizduoja į Ψ_k, figūrą Ψ_1 — į $\Psi_{k+1}, \ldots, \Psi_{n-k}$ į Ψ_0 ir t. t., vadinasi, figūros $\Psi_0, \ldots, \Psi_{n-1}$, šiuo posūkiu tarytum keičiamos ratu, ir todėl jų sąjunga nesikeičia.

Toks būdas gauti figūroms, turinčioms iš anksto numatytą simetriją, nėra parankus todėl, kad figūros, gaunamos posūkiais iš duotosios figūros Ψ, gali uždengti viena kitą (pavyzdžiui, kai parinktoji figūra Ψ jau turi reikiamą simetriją, negausime nė vieno naujo taško). Todėl paprastai daroma kitaip. Iš pradžių plokštuma dalijama į n kongruenčių kampų spinduliais, išeinančiais iš taško O, o paskui vienoje šių dalių braižoma figūra Ψ. Tuomet posūkiais bus gaunamos figūros, neturinčios viena su kita bendrų taškų, išskyrus galbūt taškus, esančius nubrėžtuose spinduliuose (49 pav.).

Spinduliai, dalijantys plokštumą, dalija figūrą Φ į n dalių, kurių kiekvieną galima gauti iš Ψ posūkių $\frac{360°k}{n}$ kampu; čia $k=0, \ldots, n-1$. Taigi kiekvienam Φ taškui A galima priskirti Ψ tašką, iš kurio jis gaunamas tokiu posūkiu. Be to, kai taškas A nepriklauso spinduliui, ribojančiam kampą, atitinkamas Ψ taškas apibrėžiamas vienareikšmiai.



48 pav.



49 pav.



50 pav.

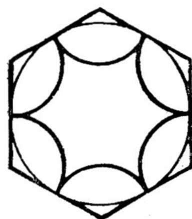
Figūra Ψ vadinama fundamentaliąja figūros Φ sritimi aibės Z_n atžvilgiu. Pavyzdžiui, skritulio fundamentali sritis Z_n atžvilgiu yra išpjova, kurios centrinis kampas lygus $\frac{360°}{n}$, o taisyklingojo n-kampio — lygiašonis trikampis, kurio viršūnė yra taške O ir kampas prie viršūnės yra lygus $\frac{360°}{n}$ (50 pav.).

Norėdami gauti figūrą Φ, kurios simetrijos aibei priklausytų ne tik posūkiai, bet ir ašinės simetrijos, turime padalyti plokštumą į n kongruenčių kampų spinduliais, išeinančiais iš taško O, kuriame nors viename kampe nubrėžti pusiaukampinę ir parinkti fundamentalią sritį Ψ, simetrišką šios pusiaukampinės atžvilgiu. Pasukę ją ir sujungę gautąsias figūras, gausime figūrą, turinčią ieškomąją simetriją. Paėmę figūros Ψ pusę, nukirstą pusiaukampine, gausime figūros Φ fundamentalią sritį transformacijų aibės D_n atžvilgiu. Iš tiesų, ašine simetrija pusiaukampinės atžvilgiu iš parinktosios pusės gauname sritį Ψ, o paskui posūkiais gauname visą figūrą Φ.

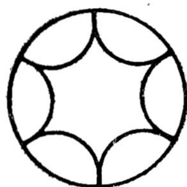
Tokią simetriją turi gražūs ornamentai, vadinami *rožėlėmis*. Kai kurie jų braižomi taip. Apskritimą dalijame į n kongruenčių dalių ir per du gretimus dalijimo taškus A_m ir A_{m+1} nubrėžiame liestines. Po to braižome apskritimo, kurio centras yra liestinių susikirtimo taške, lanką, jungiantį taškus A_m ir A_{m+1}. Sukdami gautąjį lanką, gauname įgaubtą n-kampį, kurio kraštinės yra apskritimų lankai, be to, gretimi lankai liečiasi (51 pav.). Kitokių rožėlių gautume, jei braižytume apskritimų, kurių centrai yra dalijimo taškuose, lankus, einančius per kitus dalijimo taškus (52 pav.).

Rožėlių galime gauti ir taip: sulankstome popieriaus lapą ir kerpame jį žirklėmis per visus sulankstytus sluoksnius (geriau imti rūkomąjį popierių). Taip gautas ornamentas parodytas 53 paveiksle.

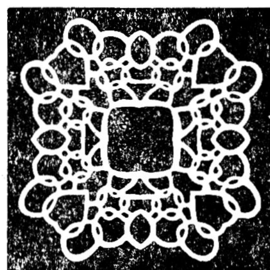
Visų rožėlių, kurias nubraižėme, simetrijų aibės buvo arba Z_n, arba D_n. Garsusis Renesanso epochos dailininkas, mokslininkas ir mąstytojas Leonardas da Vinčis (1452—1519) nagrinėjo, ar plokščiosios figūros turi kitokių baigtinių simetrijų aibių. (Šį



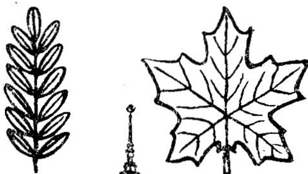
51 pav.



52 pav.



53 pav.


54 pav.



55 pav.



56 pav.

klausimą jis nagrinėjo, spręsdamas kai kurias architektūros problemas.) Jis įsitikino, kad kitokių aibių nėra. Dabar išnagrinėsime, kurios iš aibių Z_n ir D_n aptinkamos gamtoje ir mene (šį tą jau minėjome anksčiau).

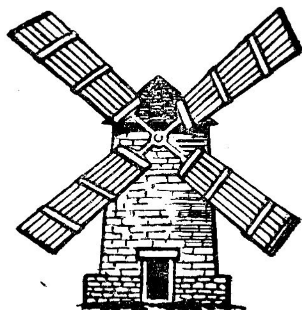
Labiausiai paplitusi ašinė simetrija, turinti aibę $D_1 = \{ES\}$. Ašinę simetriją turi augalų lapai, pastatų fasadai, vabzdžiai (vabalai, drugeliai) ir t. t. (54 pav.).

Tačiau apskritai čia būtų teisingiau kalbėti ne apie ašinę simetriją, o apie veidrodinę — apie simetriją plokštumos atžvilgiu. Kai P — tam tikra plokštuma erdvėje, simetrija jos atžvilgiu kiekvieną erdvės tašką M atvaizduoja taške M' taip, kad atkarpa MM' yra statmena plokštumai P, kuri ją dalija pusiau. Jei žiūrėtume į erdvinį paveikslą iš taško, esančio plokštumoje P, plokštumą matytume kaip tiesę, be to, taškai M ir M' būtų simetriški jos atžvilgiu. Pavyzdžiui, daiktas ir jo vaizdas veidrodyje yra simetriški veidrodžio plokštumos atžvilgiu.

Visais minėtais atvejais vietoje erdvinio objekto (pavyzdžiui, vabalo) veidrodinės simetrijos galima nagrinėti jo vaizdo ašinę simetriją. Toliau sutarkime, kad vaizdo sukamoji simetrija atitinka posūkį ašies atžvilgiu, kuris erdvinį objektą atvaizduoja į jį patį.

Tarp augalų žiedų dažniausiai pasitaiko tų, kurie turi simetrijų aibę D_5, bet yra žiedų, turinčių simetrijų aibę D_1 (kardelis), aibę D_3 (vilkdalgis), aibes D_4, D_6 ir t. t. Labai retas žiedas, turintis simetrijų aibę

Z_n. Perpjovę skersai obuolį, pamatytumėte, kad jo šerdis turi simetrijų aibę D_5. Jūros žvaigždės ir daugelis kitų dygiaodžių gyvūnų turi simetrijų aibę Z_5 arba D_5, medūzos — dažniausiai D_4 arba D_8. Įdomiausią negyvosios gamtos baigtinių simetrijų aibę turi snaigės. Paprastai jos turi simetrijų aibę D_6, kartais D_3, bet niekada D_5 arba Z_5. Architektūroje beveik visada būna aibė D_n. Egipto piramidės turi simetrijų aibę D_4 (55 pav.), Tarybinės Armijos teatro pastatas Maskvoje — aibę D_5, Vasilijaus Palaimintojo cerkvės Maskvoje kupolai, jei nekreiptume dėmesio į jų spalvą, turi simetrijų aibes Z_n ir D_n, be to, n yra gana didelis. Vazos dažnai puošiamos cikliškai išdėstytais piešiniais, turinčiais simetrijų aibę Z_n, arba ornamentais, turinčiais aibę D_n (56 pav.), vėjo malūnų sparnai (57 pav.) turi simetrijų aibę Z_3 arba Z_4.


57 pav.

Nepateikiame pavyzdžių iš fizikos — tokių, kaip molekulių ir kristalų simetrijos, nes jie nepriklauso plokštumos simetrijoms. Aišku, gamtos objektų simetrijos savybės siejasi su atomų ir molekulių simetrijos savybėmis, tačiau šis ryšys yra labai mažai ištirtas (tiksliau, jį labai sunku tirti).

Pratimai

53. Padalykite apskritimą į n kongruenčių dalių ir, laikydami dalijimo taškus centrais, nubraižykite apskritimus, einančius per gretimus dalijimo taškus. Nubraižykite, kai $n=4$, 6, 8, 12 ir kiekvieną kartą suraskite fundamentaliąsias sritis aibių Z_n ir D_n atžvilgiu.

54. Padalykite apskritimą į n kongruenčių dalių ir, laikydami dalijimo taškus centrais, nubrėžkite apskritimus, einančius per pradinio apskritimo centrą. Nubraižykite, kai $n=4$, 6, 8, 12, ir kiekvieną kartą suraskite fundamentaliąją sritį aibės Z_n atžvilgiu.

55. Raskite roželių (51—53 pav.) fundamentaliąsias sritis aibių Z_n ir D_n atžvilgiu.

56. Padalykite apskritimą į n kongruenčių dalių, nubraižykite taisyklingą įbrėžtinį ir taisyklingą apibrėžtinį n-kampį. Raskite gautosios figūros fundamentaliąsias sritis aibių Z_n ir D_n atžvilgiu.

57. Raskite taisyklingų žvaigždėtųjų n-kampių, kuriuos nubraižėte 50 užduotyje, fundamentaliąsias sritis aibių Z_n ir D_n atžvilgiu.

58. Sulankstykite rūkomojo popieriaus lapą 8 kartus ir iškirpkite iš jo roželę. Kokią simetriją turi ši roželė?



58 pav.

8. Tiesiniai ornamentai (bordiūrai). Viršutinė sienų dalis dažnai puošiama raštais, kurie vadinami *bordiūrais,* arba tiesiniais ornamentais (58 pav.). Tokiam ornamentui visų pirma daromas trafaretas, pridedamas prie sienos ir per jį dažoma siena, po to trafaretas pastumiamas, vėl dažoma siena ir t. t. Išeina raštas, jungiantis dalis, kurios gaunamos viena iš kitos lygiagrečiuoju postūmiu ta pačia kryptimi per tokį patį ilgį. Kambario raštai yra baigtinių matmenų. Bet jei įsivaizduotume į abi puses begalinę sieną, tai ornamentas būtų sudarytas iš begalinės dalių aibės ir būtų atvaizduojamas pats į save atitinkamais postūmiais į vieną ir į kitą pusę. Jei pagrindinio postūmio ilgį pažymėtume a, tai ornamentas būtų atvaizduojamas į jį patį bet kokiu postūmiu duotąja kryptimi per dydį na (n — natūrinis skaičius), taip pat analogiškais postūmiais priešinga kryptimi.

Remdamiesi šiais samprotavimais, suformuluosime apibrėžimą:

Tiesiniu ornamentu, arba bordiūru, vadinama plokščia geometrinė figūra, jei egzistuoja ją atitinkąs lygiagretusis postūmis (vektorius $\vec{a}$), turintis savybę: koks bebūtų sveikasis skaičius n, ši figūra yra atvaizduojama į ją pačią visais lygiagrečiaisiais postūmiais $\vec{na}$ ir nėra jokių kitų postūmių, kurie atvaizduotų šią figūrą į ją pačią. Vektorius $\vec{a}$ vadinamas ornamento krypties vektoriumi.

Jei nubrėžtume tieses, statmenas vektoriui $\vec{a}$ ir nutolusias viena nuo kitos atstumu a, šios tiesės padalytų visą ornamentą į begalinę dalių aibę, kurių kiekvieną galima gauti iš kitos lygiagrečiuoju postūmiu $\vec{na}$. Dvi dalys gali turėti bendrų taškų tik skiriamosiose tiesėse. Paimkime vieną dalį ir pažymėkime ją Ψ, o dalį, kuri gaunama iš jos lygiagrečiuoju postūmiu $\vec{na}$, pažymėkime Ψ_n. Tuomet kiekvieną ornamento tašką A galima gauti iš kokio nors dalies Ψ taško lygiagrečiuoju postūmiu $\vec{na}$. Be to, jei taškas nepriklauso kuriai nors skiriamajai tiesei, tai atitinkamas Ψ taškas apibrėžiamas vienareikšmiškai. Tai reiškia, kad Ψ yra ornamento fundamentalioji sritis. Kai fundamentalioji sritis Ψ turi vieną ar kitą simetriją, vadinasi, ir ornamentas turės turtingesnę simetrijų aibę, negu tik postūmiai.

Galima įrodyti, kad egzistuoja septynios ornamentų simetrijų klasės. Viena jų pavaizduota 59 paveiksle — čia nėra jokių

kitų simetrijų, išskyrus lygiagrečiuosius postūmius. Kitą klasę gauname, kai fundamentalioji sritis ψ turi simetrijos centrą (60 pav.). Tokiu atveju ornamentas turi be galo daug simetrijos centrų, kurie gaunami iš srities ψ simetrijos centro lygiagrečiaisiais postūmiais $n\vec{a}$. Galimas atvejis, kai sritis turi simetrijos ašį *l*, statmeną $\vec{a}$. Šį kartą visos tiesės, gautos iš *l* lygiagrečiaisiais postūmiais $\frac{1}{2}n\vec{a}$, bus ornamento simetrijos ašys (61 pav.). Lygiai taip pat, kai sritis ψ turi simetrijos ašį *l*, lygiagrečią vektoriui $\vec{a}$, tiesė *l* bus ir viso ornamento simetrijos ašis (62 pav.). Kai sritis ψ turi ir simetrijos ašį *l*, lygiagrečią vektoriui $\vec{a}$, ir simetrijos ašį, statmeną šiam vektoriui, tai ir gautas iš jos ornamentas turi tiek simetrijos ašį *l*, tiek ir be galo daug simetrijos ašių, statmenų *l*. Be to, šį kartą ψ turės ir simetrijos centrą (simetrijos ašių susikirtimo tašką), todėl ir ornamentas turės be galo daug simetrijos centrų (63 pav.).

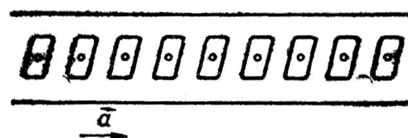
Kartais ornamentas gali turėti simetrijų, kokių neturi sritis ψ. Imkime, pavyzdžiui, figūrą, pavaizduotą 64 paveiksle. Ji turi tik d v i simetrijas — tapačiąją transformaciją *E* ir centrinę simetriją. Tačiau, pastūmę ją kryptimi $\vec{a}$, gausime ornamentą, turintį be galo daug simetrijos ašių, statmenų $\vec{a}$ (65 pav.). Taip yra todėl, kad figūra ψ sudaryta iš dviejų dalių,







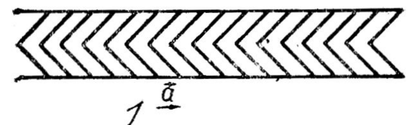
59 pav.



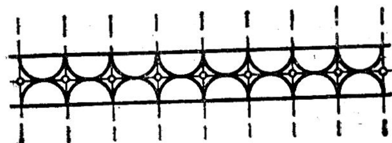
60 pav.



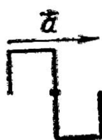
61 pav.



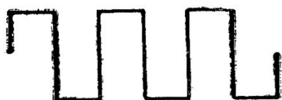
62 pav.



63 pav.



64 pav.



65 pav.

kurių kiekviena turi simetrijos ašį. Ir nors visa figūra ψ simetrijomis šių ašių atžvilgiu neatvaizduojama į ją pačią, gautas iš jos ornamentas turi papildomų simetrijų.

Analogiškai: kai pradinė figūra sudaryta iš dviejų dalių, be to, vieną jų galima atvaizduoti slenkamąja simetrija į kitą, tai gautas iš šios figūros ornamentas turės slenkamąją simetriją $S_a^{\vec{a}}$, čia $\vec{a}$ — pagrindinio postūmio vektorius.

Pratimai

59. Kokias simetrijos klases turi ornamentai, pavaizduoti 66 paveiksle?

60. 67 paveikslą papildykite taip, kad iš papildytos figūros postūmiais vektoriumi $\vec{a}$ gautume ornamentą, turintį tą pačią simetrijos klasę, kokią turi 66 paveikslo 19 figūra.

9. Gardelių simetrija. Parinkime plokštumoje Dekarto koordinačių sistemą ir pažymėkime taškus, kurių koordinatės yra sveikieji skaičiai. Gausime aibę, pavaizduotą 68 paveiksle. Pavadinsime ją kvadratinėmis *gardelėmis,* nors šitaip geriau būtų vadinti figūrą, sudarytą iš visų horizontalių ir vertikalių tiesių, einančių per šiuos taškus (69 pav.); beje, per tuos pačius taškus galima nubrėžti ir kitokius tiesių tinklelius (70 pav.).

Kitos *gardelės* gaunamos taip. Parinkime plokštumos taškus O, A ir B, nesančius vienoje tiesėje, ir pažymėkime simboliu $\vec{a}$ vektorių, kuris O atvaizduoja į A, o simboliu $\vec{b}$ — tą vektorių, kuris O atvaizduoja į B (71 pav.). Tuomet lygiagretusis postūmis $m\vec{a}+n\vec{b}$ (m, n — sveikieji skaičiai) tašką O atvaizduos į tašką M (m, n). Tokių taškų visuma sudaro gardeles (72 pav.), gautas taškų O, A ir B bazėje (arba, kitaip tariant, taško O ir vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$) bazėje. Nesunku įrodyti, kad gautume tas pačias gardeles, jei imtume, pavyzdžiui, tašką A ir vektorius, kurie jį atvaizduotų į O ir B. Šias gardeles galima gauti ir kitais būdais.

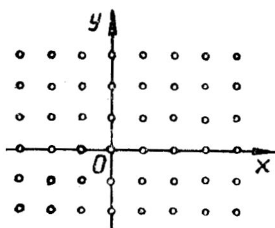
Yra p e n k i o s gardelių simetrijos klasės priklausomai nuo to, kokią simetriją turi lygiagretainis, kurio trys viršūnės yra taškuose O, A ir B. Jei tai bendriausios formos lygiagretainis, gar-

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	
23	
24	
25	
26	
27	
28	
29	
30	
31	

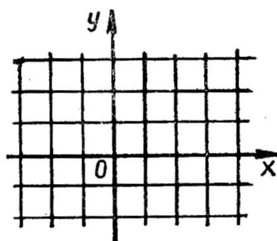
66 pav.



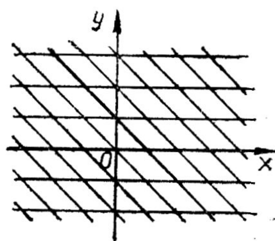
67 pav.



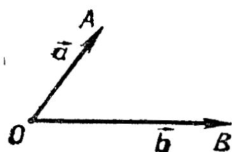
68 pav.



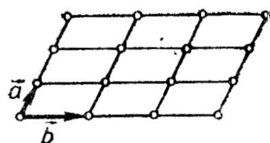
69 pav.



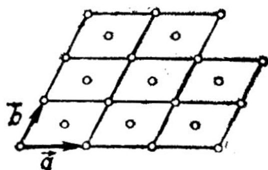
70 pav.



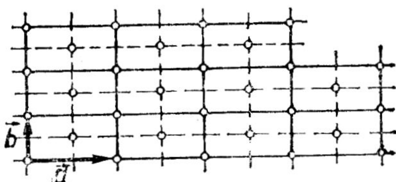
71 pav.



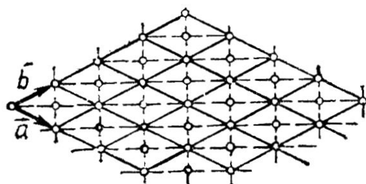
72 pav.



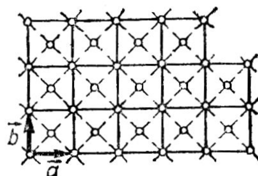
73 pav.



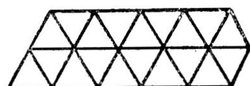
74 pav.



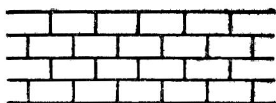
75 pav.

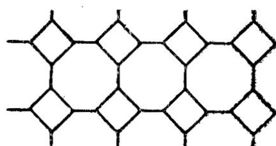


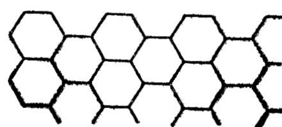
76 pav.

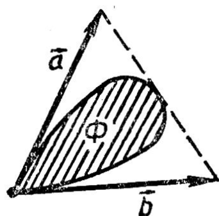


78 pav.









77 pav.

79 pav.

delių simetrijų aibei, be postūmių vektoriais $m\vec{a}+n\vec{b}$ (m ir n — sveikieji skaičiai), dar priklauso simetrijos gardelių visų taškų atžvilgiu, taip pat lygiagretainių centrų atžvilgiu (73 pav.). Gardelių simetrijų aibė bus turtingesnė, kai pradinis lygiagretainis bus stačiakampis arba rombas (74 ir 75 pav.). Šį kartą, be lygiagrečiųjų postūmių ir centrinių simetrijų, gardelės dar turės horizontalias ir vertikalias simetrijos ašis. Stačiakampėse gardelėse šios ašys eina arba per gardelių taškus, arba per stačiakampių kraštinių vidurio taškus, o rombinėse — tik per gardelių taškus.

Dar turtingesnė yra simetrijų aibė, kai pradinis lygiagretainis yra kvadratas arba išsiskaido į du taisyklingus trikampius (76 pav.). Kvadratinės gardelės papildomai turi ašines simetrijas atžvilgiu tiesių, kuriose yra kvadratų įstrižainės, ir posūkius 90° ir 270° kampu apie gardelių taškus ir kvadratų centrus. Siūlome skaitytojui pačiam išnagrinėti, kokios prisideda ašinės simetrijos ir posūkiai, kai pagrindinį lygiagretainį galima išskaidyti į du lygiakraščius trikampius (t. y., kai lygiagretainis yra rombas, kurio vienas kampas lygus 60°) (77 pav.).

Pratimai

61. 78 paveiksle pavaizduota figūra Φ ir gardelės. Nubraižykite ornamentą, atitinkantį šiuos duomenis.

62. Išvardykite ornamentų, payaizduotų 79 paveiksle, visas simetrijas.

1. Geometrinių transformacijų kompozicija. Susipažinome su kai kurių geometrinių figūrų — rombų, stačiakampių, taisyklingųjų daugiakampių, žvaigždinių taisyklingųjų daugiakampių, roželių ir t. t.— simetrijų aibėmis. Nors figūros labai įvairios, bet simetrijos aibių ne tiek jau daug: kai figūros Φ simetrijų aibė baigtinė, gaunamos D_n arba Z_n tipo aibės (t. y. arba tokios, kokias turi taisyklingasis n-kampis, arba tokios, kokias turi taisyklingasis n-kampis, kurio visos kraštinės pratęstos vienodais atstumais). Ornamentai ir gardelės gali turėti ir be galo daug simetrijų aibių. Bet ir šį kartą galima išvardyti visus šių aibių tipus.

Kyla klausimas: ar yra figūrų, turinčių kito tipo simetrijų aibių, be tų, kurias jau minėjome? Norėdami atsakyti į šį klausimą, turėsime giliau išnagrinėti simetrijos aibių struktūrą. Pirmiausia priminsime iš geometrijos kurso žinomą geometrinių transformacijų *kompozicijos* sąvoką.

Tarkime, kad φ ir Ψ — dvi geometrinės transformacijos (čia ir toliau nagrinėsime tik plokštumos transformacijas). Jei iš pradžių atliktume transformaciją φ, o paskui — transformaciją Ψ, gautume naują geometrinę transformaciją θ, t. y., kai φ atvaizduoja tašką A į tašką B, o Ψ — tašką B į tašką C, tai θ atvaizduoja A į C. Ši transformacija vadinama transformacijų φ ir Ψ kompozicija ir žymima $\Psi\circ\varphi$. Taigi

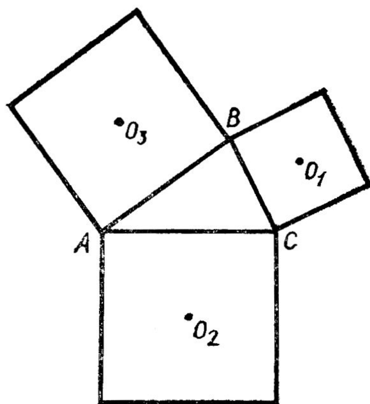
$$(\Psi\circ\varphi)(A)=\Psi(\varphi(A)).$$

Remdamiesi poslinkių klasifikacija, kurią sudarėme anksčiau, galime iš karto surasti, kokio tipo yra poslinkis, gautas dviejų arba daugiau poslinkių kompozicija. Pavyzdžiui, rasime posūkių $R^{\alpha}_{O_1}$ ir $R^{\beta}_{O_2}$ kompoziciją. Posūkiu $R^{\alpha}_{O_1}$ kiekvienas spindulys l atvaizduojamas į spindulį m, sudarantį su l kampą α, o posūkiu $R^{\beta}_{O_2}$ spindulys m atvaizduojamas į spindulį, sudarantį su juo kampą β. Vadinasi, atlikę iš pradžių posūkį $R^{\alpha}_{O_1}$, o paskui posūkį $R^{\beta}_{O_2}$, kiekvieną spindulį atvaizduosime į spindulį, sudarantį su juo kampą $\alpha+\beta$. Kai $\alpha+\beta$ nėra kartotinis 360°, $R^{\beta}_{O_2}\circ R^{\alpha}_{O_1}$ yra posūkis kampu $\alpha+\beta$ apie kažkokį tašką O_3, t. y. $R^{\beta}_{O_2}\circ R^{\alpha}_{O_1}=R^{\alpha+\beta}_{O_3}$. O kai $\alpha+\beta$ yra kartotinis 360°, tai $R^{\beta}_{O_2}\circ R^{\alpha}_{O_1}$ — lygiagretusis postūmis.

Atstojamojo posūkio kampu $\alpha+\beta$ centrą O_3 galėsime nesunkiai rasti, radę kurių nors dviejų taškų A ir B vaizdus: kai taškas A atsiduria taške A_1, o taškas B — taške B_1, O_3 yra vienodai nutolęs ir nuo A bei A_1, ir nuo B ir B_1. Vadinasi, pakanka per atkarpų AA_1 ir BB_1 vidurio taškus nubrėžti statmenis ir rasti jų susikirtimo tašką O_3.

Transformacijų kompozicija dažnai naudojama sprendžiant geometrijos uždavinius.

1 uždavinys. Ant trikampio ABC kraštinių nubraižyti kvadratai, esantys šalia šio trikampio, ir pažymėti jų centrai O_1, O_2, O_3 (80 pav.). Reikia atkurti trikampį, žinant tik šių centrų padėtį.



80 pav.

Sprendimas. Pasirinkime viršūnę A ir nuosekliai atlikime posūkius $R^{90°}_{O_1}$, $R^{90°}_{O_2}$, $R^{90°}_{O_3}$. Kadangi $R^{90°}_{O_1}(A)=B$, $R^{90°}_{O_2}(B)=C$ ir $R^{90°}_{O_3}(C)=A$, taškas A grįš į savo vietą. Bet transformacija $R^{90°}_{O_3} \circ R^{90°}_{O_2} \circ R^{90°}_{O_1}$ nekeičia orientacijos ir turi nejudantį tašką A, todėl ji yra posūkis apie šį tašką 270°kampu. Vadinasi, norėdami išspręsti uždavinį, turime surasti atstojamojo posūkio centrą.

Išspręstas uždavinys yra 2 uždavinio atskiras atvejis.

2 uždavinys. Ant trikampio ABC kraštinių nubraižyti lygiašoniai trikampiai, esantys šalia ABC, ir pažymėtos jų viršūnės O_1, O_2, O_3. Reikia atkurti trikampį, žinant kampų, kurių viršūnės yra taškuose O_1, O_2, O_3, didumus α, β, γ, kai $\alpha+\beta+\gamma\neq 360°$.

Kadangi $R^{\gamma}_{O_3} \circ R^{\beta}_{O_2} \circ R^{\alpha}_{O_1}(A)=A$, tai viršūnė A yra atstojamojo posūkio centras.

Kai $\alpha+\beta+\gamma=360°$, tai $R^{\gamma}_{O_3} \circ R^{\beta}_{O_2} \circ R^{\alpha}_{O_1}$ — tapačioji transformacija ir uždavinys turi be galo daug sprendinių.

Pratimai

63. Įrodykite, kad lygiagrečiojo postūmio ir ašinės simetrijos kompozicija yra ašinė arba slenkamoji simetrija. Sugalvokite, kaip nubrėžti atstojamosios simetrijos ašį.

64. Įrodykite, kad posūkio ir ašinės simetrijos kompozicija yra ašinė arba slenkamoji simetrija. Raskite šios simetrijos ašį.

65. Įrodykite, kad lygiagrečiojo postūmio ir posūkio kompozicija yra posūkis tuo pačiu kampu. Raskite šio posūkio centrą.

66. Įrodykite, kad transformacija $S_l \circ R^{\alpha}_{O} \circ S_l$ yra posūkis kampu $-\alpha$ apie tašką, simetrišką taškui O tiesės l atžvilgiu.

67. Įrodykite, kad transformacija $S_1 \circ \vec{a} \circ S_1$ yra lygiagretusis postūmis.

68. Plokštumoje pažymėti tam tikro n-kampio kraštinių vidurio taškai; čia n — nelyginis skaičius. Pažymėkite šio n-kampio viršūnes.

69. Nubraižykite penkiakampį, kai žinomos taisyklingųjų penkiakampių, nubraižytų ant jo kraštinių ir esančių šalia jo, viršūnės.

70. Išspręskite 69 uždavinį, kai ant penkiakampio kraštinių nubraižyti kvadratai ir pažymėti jų centrai.

71. Nubrėžta tiesė l, atkarpa CD ir tiesės l vienoje pusėje pažymėti taškai A ir B. Raskite tiesės l atkarpą EH, kongruenčią atkarpai CD ir tokią, kad laužtės $AEHB$ ilgis būtų mažiausias.

72. Plokštumoje nubrėžta n tiesių: $l_1, \ldots, l_n$; čia n — lyginis skaičius. Nubraižykite n-kampį $A_1A_2 \ldots A_n$, kai:

a) šios tiesės yra jo kraštinių vidurio statmenys;

b) šios tiesės yra priekampių arba vidinių kampų, esančių prie viršūnių, pusiaukampinės.

73. Į duotąjį apskritimą įbrėžkite n-kampį, kurio kraštinės būtų lygiagrečios n duotosioms tiesėms plokštumoje.

74. Posūkį R_O^α išreikškite dviejų ašinių simetrijų kompozicija. Kokiame taške kertasi šių simetrijų ašys ir kokio didumo kampą jos sudaro? Ar vienareikšmiškai apibrėžtos simetrijos ašys?

75. Lygiagretųjį postūmį $\vec{a}$ išreikškite dviejų ašinių simetrijų kompozicija. Kokia yra šių simetrijų ašių kryptis ir kam lygus atstumas tarp jų? Ar vienareikšmiškai apibrėžtos šios ašys?

76. Slenkamąją simetriją $S_a^{\vec{a}}$ išreikškite trijų ašinių simetrijų kompozicija.

77. Raskite lygiagrečiojo postūmio $\vec{a}$ ir posūkio R_o^α kompoziciją.

2. Transformacijų algebra. Transformacijų kompozicija turi keletą įdomių savybių, panašių teigiamų skaičių dauginimo savybėms. Pirmiausia įrodysime, kad transformacijų kompozicija yra *asociatyvi,* t. y., kokios bebūtų trys transformacijos f, g, h, visada

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h). \qquad (1)$$

Iš tiesų, jei transformacija h tašką A atvaizduoja į tašką B, transformacija g — tašką B į tašką C, o transformacija f — tašką C į tašką D, tuomet tiek $(f \circ g) \circ h$, tiek ir $f \circ (g \circ h)$ tašką A atvaizduoja į D. Iš tikrųjų, kadangi $g(B) = C$ ir $f(C) = D$, tai

$$(f \circ g)(B) = f[g(B)] = f(C) = D.$$

Kadangi $h(A) = B$, tai

$$[(f \circ g) \circ h](A) = (f \circ g)[h(A)] = (f \circ g)(B) = D.$$

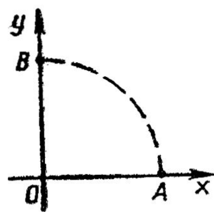
Analogiškai patikriname, kad

$$[f \circ (g \circ h)](A) = D.$$

Vadinasi, šios dvi transformacijos bet kokį plokštumos tašką atvaizduoja į vieną ir tą patį tašką, o tai ir reiškia, kad yra teisinga (1) lygybė.

Transformacijų kompozicija *komutatyvumo* savybės neturi — lygybė $f \circ g = g \circ f$ ne visuomet yra teisinga.

P a v y z d y s. Tarkime $f = R_O^{90°}$, o g — lygiagretusis plokštumos postūmis per vieną ilgio vienetą į dešinę. Tuomet $f(O) = O$ ir $g(O) = A$ (81 pav.), todėl $(g \circ f)(O) = g(f(O)) = A$. Antra vertus, $g(O) = A$ ir $f(A) = B$, todėl $(f \circ g)(O) = f(g(O)) = f(A) = B$. Kadangi $A \neq B$, tai $g \circ f$ ir $f \circ g$ tašką O atvaizduoja į skirtingus taškus, t. y. $g \circ f \neq f \circ g$.



81 pav.

Tokią pačią reikšmę, kokią skaičių daugyboje turi vienetas, transformacijų kompozicijoje turi tapačioji transformacija E: kokia bebūtų transformacija f, visuomet

$$f \circ E = E \circ f = f.$$

Norėdami įsitikinti, kad ši lygybė teisinga, prisiminkime E apibrėžimą: koks bebūtų taškas A, visuomet $E(A) = A$ ir todėl

$$(f \circ E)(A) = f(E(A)) = f(A).$$

Tai ir reiškia, kad $f \circ E = f$. Analogiškai įrodoma lygybė $E \circ f = f$:

$$(E \circ f)(A) = E(f(A)) = f(A).$$

Priminsime, kad transformacija, atvirkštinė transformacijai f, vadinama transformacija f^{-1}, tenkinanti sąlygą: $f^{-1}(B) = A$, kai $f(A) = B$. Aišku, kad, iš pradžių atlikus transformaciją f, o paskui transformaciją f^{-1}, visi plokštumos taškai liks vietoje. Tai reiškia, kad $f^{-1} \circ f = E$. Analogiškai įrodytume, kad $f \circ f^{-1} = E$.

Aišku, kad transformacija f yra atvirkštinė transformacijai f^{-1}:

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Nesunku parašyti transformaciją, atvirkštinę transformacijų g ir f kompozicijai $f \circ g$, t. y. $(f \circ g)^{-1}$. Užtenka paimti transformacijas, atvirkštines f ir g, o paskui jų kompoziciją, t. y. transformaciją $g^{-1} \circ f^{-1}$. Iš tiesų, remdamiesi asociatyvumo savybe, gauname:

$$(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1}.$$

Bet $g \circ g^{-1} = E$ ir todėl

$$(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ E \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = E.$$

Tai ir reiškia, kad $g^{-1} \circ f^{-1}$ yra atvirkštinė $f \circ g$.

Taigi, norėdami gauti transformaciją, atvirkštinę $f \circ g$, turėjome ne tik f ir g pakeisti joms atvirkštinėmis transformacijomis, bet ir sukeisti šias transformacijas vietomis. Beje, rytą iš pradžių apsivelkame marškinius, o paskui švarką, o vakare iš pradžių nusivelkame švarką, o paskui marškinius.

Pratimai

78. Kokia transformacija yra atvirkštinė:

a) lygiagrečiajam postūmiui $\vec{a}$;
b) posūkiui R_O^{α};
c) ašinei simetrijai S_l;
d) slenkamajai simetrijai $S_{\vec{a}}^{\alpha}$?

79. Raskite transformacijų kompoziciją $S_l \circ R_O^{\alpha} \circ S_l$.

80. Raskite transformacijų $f \circ g \circ f^{-1}$ ir $f \circ h \circ f^{-1}$ kompoziciją.

81. Raskite transformaciją, atvirkštinę transformacijai

$$f \circ g \circ f^{-1}.$$

3. **Transformacijų grupės.** Dažnai būna taip, kad vienos ir kitos rūšies dviejų transformacijų kompozicijos yra vėl tos pačios rūšies transformacija. Pavyzdžiui, sakykime, kad f ir g — plokštumos poslinkiai. Kadangi šios transformacijos nekeičia atstumų tarp plokštumos taškų, jų kompozicija $f \circ g$ nekeičia atstumų, t. y. taip pat plokštumos poslinkis.

Apskritai, kai tam tikrą aibę G sudaro transformacijos, kurios nekeičia tam tikro objekto, tai kartu su bet kuriomis dviem transformacijomis, priklausančiomis G, šiai aibei priklauso ir jų kompozicija. Pavyzdžiui, bet koks posūkis apie tašką O nejudina taško O ir nekeičia apėjimo krypties (orientacijos). Todėl galima manyti, kad dviejų posūkių apie tašką O kompozicija vėl bus posūkis apie tą patį tašką. Iš tiesų:

$$R_O^{\alpha} \circ R_O^{\beta} = R_O^{\alpha+\beta}.$$

Dviejų lygiagrečiųjų postūmių kompozicija vėl yra lygiagretusis postūmis (lygiagretieji postūmiai bet kurį lygiagrečių tiesių pluoštą atvaizduoja į jį patį).

Visuose išnagrinėtuose pavyzdžiuose galiojo dar viena sąlyga — **kai tam tikra transformacija priklauso duotajai aibei** (poslinkių, posūkių apie tašką O arba lygiagrečiųjų postūmių aibei), **tai šiai aibei priklauso ir atvirkštinė jai transformacija** (transformacija, atvirkštinė poslinkiui, yra poslinkis; transformacija, atvirkštinė posūkiui apie tašką O, yra posūkis apie tą patį tašką; transformacija, atvirkštinė lygiagrečiajam postūmiui, yra lygiagretusis postūmis).

Nereikia manyti, kad bet kuri transformacijų aibė yra uždara kompozicijos ir atvirkštinės transformacijos operacijos atžvilgiu. Pavyzdžiui, ašinių simetrijų aibė šios savybės neturi: dviejų ašinių simetrijų kompozicija yra posūkis arba lygiagretusis postūmis, bet ne ašinė simetrija. Analogiškai, dviejų slenkamųjų simetrijų kompozicija yra transformacija, kuri nėra slenkamoji simetrija.

Transformacijų visumos, uždaros kompozicijos ir atvirkštinio elemento konstravimo operacijos atžvilgiu, labai svarbios matematikoje. Todėl tokios visumos pavadintos *transformacijų grupėmis*.

Taigi sakysime, **kad netuščia geometrinių transformacijų aibė sudaro grupę, kai**

a) šiai aibei priklauso transformacijų kompozicijos $\varphi \circ \Psi$ ir $\Psi \circ \varphi$, jei tik jai priklauso transformacijos φ ir Ψ;

b) kartu su kiekviena transformacija φ šiai aibei priklauso ir atvirkštinė jai transformacija φ^{-1}.

Iš a) ir b) reikalavimų išplaukia, kad kiekvienai transformacijų grupei priklauso tapačioji transformacija E: jai priklauso nors viena transformacija φ, todėl ir $\varphi^{-1} \in G$, o tuomet ir transformacija $\varphi^{-1} \circ \varphi$, t. y. E priklauso G.

Pratimai

82. Ar ašinės simetrijos sudaro transformacijų grupę?

83. Ar centrinės simetrijos sudaro transformacijų grupę?

84. Ar sudaro transformacijų grupę homotetijos fiksuoto taško O atžvilgiu?

85. Nubrėžkite tiesę ir nurodykite kryptį joje. Ar sudaro grupę lygiagretieji postūmiai, turintys duotąją kryptį? O lygiagretieji postūmiai, lygiagretūs duotajai tiesei?

86. Ar sudaro grupę tapačiosios transformacijos ir ašinės simetrijos S_l visuma?

4. Geometrinės figūros simetrijų grupė. Tarkime, Φ — geometrinė figūra ir G_Φ — jos simetrijų aibė. Jei f ir g priklauso G_Φ, tai jos atvaizduoja figūrą Φ į ją pačią. Bet tuomet ir transformacija $f \circ g$ atvaizduos Φ į ją pačią. Pavyzdžiui, ašinėmis simetrijomis tiesių AC ir BD atžvilgiu rombas $ABCD$ atvaizduojamas į jį patį. Todėl šių simetrijų kompozicija, t. y. centrine simetrija įstrižainių susikirtimo taško O atžvilgiu, jis bus atvaizduojamas į jį patį.

Kartu su kiekviena transformacija f aibei G_Φ priklauso ir transformacija f^{-1}, atvirkštinė f. Juk jeigu f atvaizduoja figūrą Φ į ją pačią, tai šią savybę turi ir f^{-1},— šia transformacija visi figūros Φ taškai grąžinami į pradinę padėtį, t. y. taip pat į tos pačios figūros taškus.

Įrodėme štai ką: jei figūros Φ simetrijų aibei G_Φ priklauso bet kokios transformacijos f ir g, tai kartu priklauso ir jų kompozicija $f \circ g$, ir jei priklauso f, tai priklauso ir atvirkštinė jai transformacija f^{-1}. Kitaip tariant, G_Φ yra transformacijų grupė. Todėl toliau sakysime ne „figūros Φ simetrijų aibė“, o „figūros Φ simetrijų grupė“.

Kai figūra Φ yra daugiakampis, tai bet kokia transformacija, priklausanti G_Φ, atvaizduoja Φ viršūnes į to paties daugiakam-

pio viršūnes. Todėl daugiakampio simetrijas galima parašyti lentelėmis, sudarytomis iš dviejų eilučių: pirmoje eilutėje išvardijamos daugiakampio viršūnės, o antroje — viršūnės, į kurias jos atvaizduojamos duotąja transformacija. Pavyzdžiui, stačiakampio $ABCD$ simetrijų grupę sudaro tokios transformacijos:

$$\begin{pmatrix} ABCD \\ ABCD \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ABCD \\ BADC \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} ABCD \\ CDAB \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ABCD \\ DCBA \end{pmatrix}.$$

Nesunku rasti transformacijų, parašytų tokiomis lentelėmis, kompoziciją: reikia sekti, kuriame taške atsiduria kiekvienas taškas.

Pavyzdžiui, kai

$$f = \begin{pmatrix} ABCD \\ BADC \end{pmatrix} \text{ ir } g = \begin{pmatrix} ABCD \\ DCBA \end{pmatrix},$$

tai transformacija $g \circ f$ tašką A iš pradžių atvaizduoja į B, o paskui B — į C, t. y. $g \circ f$ tašką A atvaizduoja į C. Panašiai gauname, kada B atsiduria taške D, C — taške A ir D — taške B. Vadinasi,

$$g \circ f = \begin{pmatrix} ABCD \\ CDAB \end{pmatrix}.$$

Pratimai

87. Parašykite lentelėmis taisyklingojo šešiakampio $ABCDEH$ simetrijų grupę.

88. Tarkime, kad $f \in G_\Phi$; čia Φ — penkiakampis $ABCDE$ ir f apibrėžiama lentele

$$\begin{pmatrix} ABCDE \\ BCDEA \end{pmatrix}.$$

Įrodykite, kad lentelės

$$\begin{pmatrix} ABCDE \\ EABCD \end{pmatrix} \text{ ir } \begin{pmatrix} ABCDE \\ DEABC \end{pmatrix}$$

taip pat apibrėžia transformacijas, priklausančias G_Φ.

89. Raskite transformacijų kompoziciją $f \circ g$ ir $g \circ f$, kai

$$f = \begin{pmatrix} ABCDEF \\ DEFABC \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} ABCDEF \\ CDEFAB \end{pmatrix}.$$

90. Kai figūra Φ turi simetrijos centrą O ir simetrijos ašį l, einančią per tašką O, ji yra simetriška ir atžvilgiu tiesės m, einančios per tašką O ir statmenos ašiai l. Įrodykite.

91. Kai figūra Φ turi simetrijos ašį ir posūkiu 60° kampu yra atvaizduojama į ją pačią, ji turi bent tris simetrijos ašis. Įrodykite.

92. Kai figūra Φ lygiagrečiuoju postūmiu $\vec{a}$ yra atvaizduojama į ją pačią, tai ir visais lygiagrečiaisiais postūmiais $\vec{na}$ (n — sveikasis skaičius) ji bus atvaizduojama į ją pačią. Įrodykite.

93. Įrodykite, kad figūra Φ turi be galo daug simetrijos centrų, kurie lygiagrečiuoju postūmiu $\vec{a}$ yra atvaizduojami vienas į kitą, kai ši figūra turi simetrijos centrą O ir lygiagrečiuoju postūmiu $\vec{a}$ yra atvaizduojama į ją pačią.

94. Kai figūra Φ turi dvi simetrijos ašis l ir m, sudarančias kampą α, tai posūkiu apie šių ašių susikirtimo tašką 2α kampu ji yra atvaizduojama į tą pačią figūrą. Įrodykite.

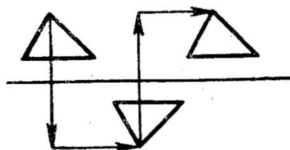
95. Kai figūra Φ turi dvi lygiagrečias simetrijos ašis, tai lygiagrečiuoju postūmiu $\vec{a}$, kurio kryptis yra statmena simetrijos ašims, o didumas yra du kartus didesnis už atstumą tarp šių ašių, ji yra atvaizduojama į tą pačią figūrą. Įrodykite.

96. Kai figūra Φ turi simetrijos ašį l, ir posūkiu kampu α apie tašką O, nepriklausantį l, yra atvaizduojama į ją pačią, tai ir posūkiu kampu $-\alpha$ apie tašką O_1, simetrišką taškui O ašies l atžvilgiu, ji bus atvaizduojama į tą pačią figūrą. Įrodykite.

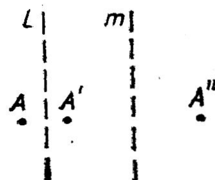
5. **Baigtinės geometrinių transformacijų grupės.** Apibūdinome geometrinių transformacijų grupių du tipus, susidedančius iš baigtinės elementų aibės — D_n ir Z_n tipo grupes. Dabar įrodysime, kad kitokių baigtinių plokštumos transformacijų grupių nėra. Pirmiausia išsiaiškinsime, kokių transformacijų negali būti baigtinėse grupėse. Aišku, kad kai geometrinių transformacijų grupėje yra nenulinis lygiagretusis postūmis $\vec{a}$, tai ji yra begalinė (nes jai priklauso visi lygiagretieji postūmiai $\vec{na}$, $n \in Z$). Todėl, norint įrodyti, kad kažkokios transformacijos negali priklausyti baigtinėms grupėms, pakanka parodyti, kad jeigu egzistuoja transformacijos, egzistuoja ir nenulinis lygiagretusis postūmis.

1 l e m a. **Baigtinei transformacijų grupei negali priklausyti slenkamoji simetrija $\vec{S_a^a}$.**

Tikrai, iš 82 paveikslo matyti, kad dvigubas slenkamosios simetrijos $\vec{S_a^a}$ taikymas yra ekvivalentus lygiagrečiajam postūmiui



82 pav.



83 pav.

$\vec{2a}$. Vadinasi, kad $S_a^{\vec{a}} \in G$, tai ir $\vec{2a} \in G$, o tuomet grupė G yra begalinė.

2 lema. **Baigtinei transformacijų grupei negali priklausyti ašinės simetrijos lygiagrečių, bet skirtingų ašių l ir n atžvilgiu.**

Tikrai, poslinkiu $S_m \circ S_l$ visi plokštumos taškai perkeliami kryptimi, statmena l ir m, per atstumą, lygų dvigubam atstumui tarp šių tiesių (83 pav.). Kitaip tariant, $S_m \circ S_l$ yra nenulinis lygiagretusis postūmis $S_m \circ S_l = \vec{a}$. Kai $S_l \in G$ ir $S_m \in G$, tai $\vec{a} \in G$, todėl grupė G yra begalinė.

3 lema. **Baigtinei transformacijų grupei negali priklausyti posūkiai $R_{O_1}^{\alpha}$ ir $R_{O_2}^{\beta}$ apie skirtingus centrus O_1 ir O_2** (aišku, kad $R_{O_1}^{\alpha} \neq E$, $R_{O_2}^{\beta} \neq E$).

Tikrai, jei $R_{O_1}^{\alpha}$ ir $R_{O_2}^{\beta}$ priklausytų grupei, tai šiai grupei priklausytų ir geometrinė transformacija $R_{O_1}^{-\alpha} \circ R_{O_2}^{-\beta} \circ R_{O_1}^{\alpha} \circ R_{\alpha}^{\beta}$.

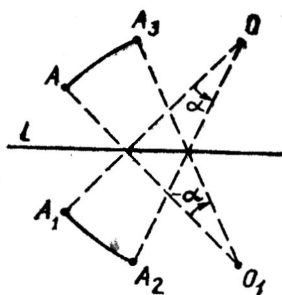
Bet šia transformacija kiekvienas spindulys l atvaizduojamas į spindulį, sudarantį su juo kampą $-\alpha-\beta+\alpha+\beta$, t. y. į spindulį, lygiagretų ir vienakryptį l. Tai reiškia, kad $R_{O_1}^{-\alpha} \circ R_{O_2}^{-\beta} \circ R_{O_1}^{\alpha} \circ$ $\circ R_{O_2}^{\beta}$ yra lygiagretusis postūmis.

Nesunku įrodyti, kad šis postūmis nėra nulinis: pakanka rasti tašką, kuris keičia savo padėtį. Išsiaiškinkime, kur atsiduria po šios transformacijos taškas O_2. Posūkis $R_{O_2}^{\beta}$ palieka jį vietoje: $R_{O_2}^{\beta}(O_2) = O_2$. Po to posūkis $R_{O_1}^{\alpha}$ tašką O_2 atvaizduoja į kurį nors tašką A, o posūkis $R_{O_2}^{-\beta}$ pasuka A apie tašką O_2, todėl A atsiduria taške B, nesutampančiame su A. Pagaliau dar reikia atlikti posūkį $R_{O_2}^{-\alpha}$. Po šio posūkio taškas A atsidurs taške O_2, vadinasi, taškas B — kuriame nors taške C, nesutampančiame su O_2. Taigi įrodėme, kad $R_{O_1}^{-\alpha} \circ R_{O_2}^{-\beta} \circ R_{O_1}^{\alpha} \circ R_{O_2}^{\beta}(O_2) \neq O_2$, t. y., kad lygiagretusis postūmis nėra nulinis.

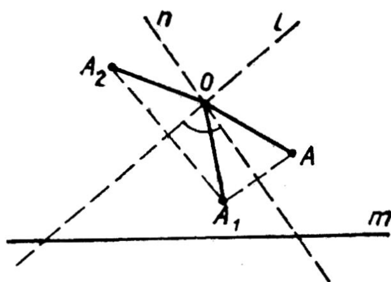
Bet baigtinėje grupėje negali būti tokio postūmio. Vadinasi, jai negali kartu priklausyti $R_{O_1}^{\alpha}$ ir $R_{O_2}^{\beta}$.

4 lema. **Baigtinei grupei G negali priklausyti ašinė simetrija S_l ir posūkis R_O^{α}, kurio centras nėra tiesėje l.**

Tikrai, kai $S_l \in G$ ir $R_O^{\alpha} \in G$, tai ir transformacija $S_l \circ R_O^{\alpha} \circ S_l$ priklauso G. Bet ši transformacija nejudina taško O_1, simetriško taškui O tiesės l atžvilgiu (iš pradžių jis atvaizduojamas taške O, paskui posūkis R_O^{α} palieka jį vietoje, o paskui O vėl atvaizduojamas taške O_1). Kiti plokštumos taškai pasisuka apie tašką O_1 kampu $-\alpha$ (84 pav.). Vadinasi, $S_l \circ R_O^{\alpha} \circ S_l = R_{O_1}^{-\alpha} \in G$. Įrodėme, kad grupei G turi priklausyti posūkis $R_{O_1}^{-\alpha}$, jei tik šiai grupei priklauso transformacijos S_l ir R_O^{α}. Tačiau baigtinėje transformacijų grupėje negali būti posūkių apie skirtingus centrus.



84 pav.



85 pav.

5 lema. **Baigtinei transformacijų grupei negali priklausyti ašinės simetrijos S_l, S_m, S_n, kurių ašys neina per vieną tašką** (t. y. tokių, kad $l \cap m \cap n = \varnothing$).

Iš tiesų, tarkime, kad $l \cap m \cap n = \varnothing$ ir simetrijos S_l, S_m, S_n priklauso grupei G. Tuomet ir transformacija $S_n \circ S_l$ priklauso tai pačiai grupei. Bet ši transformacija nepajudina ašių l ir n susikirtimo taško O (ir S_l, ir S_n šį tašką atvaizduoja į jį patį). Kiti taškai pasisuka apie tašką O kampu α, kuris yra du kartus didesnis už kampą tarp l ir n (85 pav.). Vadinasi, $S_n \circ S_l = R_O^\alpha$. Išeina, kad grupei G priklauso ir simetrija S_m ir posūkis R_O^α, kurio centras nėra tiesėje m (kadangi $O \in l \cap n$, o $l \cap n \cap m = \varnothing$). Bet tuomet grupė būtų begalinė (žr. 4 lemą). Vadinasi, prielaida, kad S_l, S_m, S_n priklauso baigtinei grupei, yra klaidinga.

Iš 1—5 lemų išplaukia, kad baigtinei geometrinių transformacijų grupei gali priklausyti tik posūkiai apie vieną centrą O ir simetrijos atžvilgiu tiesių, einančių per šį tašką. Dabar jau turime visus duomenis, kurių reikia, norint įrodyti šią Leonardo da Vinčio teoremą.

Teorema. **Bet kuri baigtinė geometrinių transformacijų grupė sutampa arba su viena Z_n tipo grupe, arba su viena D_n tipo grupe.**

Įrodymas. Jei grupę G sudaro tik tapačioji transformacija E ir ašinė simetrija S_l, ji yra D_1 tipo. Jei šiai grupei priklauso bent dvi ašinės simetrijos S_l ir S_m, tai, remiantis 2 lema, tiesės l ir m kertasi, o tuomet grupei G priklauso posūkis $S_m \circ S_l$. Todėl iš karto galime tarti, kad grupei G priklauso posūkiai, be to, remiantis 3 lema, visi šie posūkiai atliekami apie vieną ir tą patį tašką. Visų posūkių bendrą centrą pažymime O.

Kadangi posūkių, priklausančių grupei G, skaičius yra baigtinis, tai tarp šių posūkių kampų didumų yra mažiausias skaičius α. Šis skaičius — 360 daliklis. Juk jei 360 nesidalytų iš α, rastume tokį sveiką skaičių k, tenkinantį sąlygą $k\alpha < 360° < (k+1)\alpha$. Kai posūkis apie tašką O kampu α priklauso G, tai ir posūkis

kampu $-k\alpha$, t. y. $360^\circ-k\alpha$, priklauso G. Taip negali būti, nes $0^\circ \leqslant 360^\circ-k\alpha<\alpha$, o α — mažiausia teigiama posūkių iš grupės G kampų reikšmė.

Taigi 360 dalijasi iš α. Skaičių $\frac{360^\circ}{\alpha}$ pažymėsime raide n, tuomet $(R_O^\alpha)^n=R_O^{n\alpha}=R_O^{360^\circ}=E$. Vadinasi, atlikę posūkį R_O^α paeiliui n kartų, gauname tapačiąją transformaciją.

Kitokių posūkių, išskyrus $R_O^{k\alpha}$, $k=0, 1, \ldots, n-1$ grupėje G nėra. Šis teiginys įrodomas taip pat, kaip įrodomas 360 dalumas iš α (kai $R_O^\beta \in G$, tai β dalijasi iš α). Jei grupėje G nėra ašinių simetrijų, ji sudaryta tik iš šių n posūkių. Tokiu atveju $G=Z_n$.

Dar turime išnagrinėti atvejį, kai grupei G, be posūkių $R_O^{k\alpha}$ (čia $\alpha=\frac{360^\circ}{n}$, $k=0, 1, \ldots, n-1$), priklauso ir ašinės simetrijos. Kadangi ši grupė pagal sąlygą yra baigtinė, tai, remiantis 4 lema, simetrijos ašys eina per tašką O. Tarkime, kad grupėje G yra ašinės simetrijos S_l ir S_m. Tuomet grupei G turi priklausyti ir jų kompozicija $S_l \circ S_m$, t. y. posūkis apie tašką O kampu $2\widehat{lm}$. Iš to išplaukia, kad $2\widehat{lm}=k\alpha$, t. y. $\widehat{lm}=\frac{k\alpha}{2}$.

Taigi, jei grupėje G yra ašinių simetrijų, šių simetrijų ašys turi sudaryti kampus, kurių didumai lygūs $\frac{k\alpha}{2}$; čia $\alpha=\frac{360^\circ}{n}$, $k=0$, $1, \ldots, n-1$. Tokių simetrijų yra — tai transformacijos $R_O^{k\alpha} \circ S_l$; čia l — viena simetrijos ašis. Kadangi šios transformacijos keičia apėjimo kryptį (S_l ją keičia, o $R_O^{k\alpha}$ — nekeičia) ir turi nejudantį tašką O, tai $R_O^{k\alpha} \circ S_l$ yra simetrija atžvilgiu kokios nors ašies, einančios per tašką O. Belieka pridurti, kad tiek $R_O^{k\alpha} \circ S_l$, tiek S_m ($\widehat{lm}=\frac{k\alpha}{2}$, $O \in m$) atvaizduoja tiesę l į vieną ir tą pačią tiesę, einančią per tašką O ir sudarančią su l kampą $k\alpha$. Taigi $R_O^{k\alpha} \circ S_l=S_m$ priklauso G.

Įrodėme, kad grupę G sudaro tos pačios transformacijos, kurios sudaro grupę D_n (n posūkių $R_O^{k\alpha}$, kai $\alpha=\frac{360^\circ}{n}$, $k=0, 1, \ldots, n-1$, ir n ašinių simetrijų atžvilgiu tiesių, einančių per tašką O ir sudarančių viena su kita kampus $\frac{k\alpha}{2}$). Teorema įrodyta.

Įrodydami šią teoremą, pastebėjome, kad visus poslinkius iš grupės D_n galima gauti tik dviejų poslinkių R_O^α ir S_a kompozicija. Tikrai, $R_O^{m\alpha}=R_O^\alpha \circ \ldots \circ R_O^\alpha$, $S_{a_m}=R_O^{m\alpha} \circ S_a$. O kai a ir b — dvi gretimos simetrijų iš D_n ašys, tai $S_b \circ S_a=R_O^\alpha$ (arba $R_O^{-\alpha}$). Vadinasi, bet kokį poslinkį iš D_n galima gauti dviejų simetrijų S_a ir S_b kompozicija; sakoma, kad grupė D_n yra šių dviejų simetrijų p a d a r i n y s.





86 pav.

P r a k t i n ė u ž d u o t i s. Du vertikaliai stovinčius veidrodžius sustatykite vieną šalia kito ir pakreipkite, kad kampas tarp jų būtų lygus β. Kokį nors daiktą, pavyzdžiui pieštuką, palaikykite virš bendros veidrodžių briaunos ir pažiūrėkite, kokį gausite šio daikto vaizdą abiejuose veidrodžiuose. Ar, dar prieš atlikdami eksperimentą, negalite pasakyti, kiek šio daikto vaizdų pamatysite? Išnagrinėkite teoriškai ir eksperimentiškai atvejus $\beta=90°$, $60°$, $45°$ (šis dydis $\beta=\frac{180°}{n}$, kai $n=2, 3, 4$). Tiesą tariant, β gali būti bet koks, bet tik tada, kai $\beta=\frac{180°}{n}$, visų vaizdų visuma bus simetriška ir turinti simetrijų grupę D_n. (Tai irgi nesunkiai pamatytume, iš lėto keisdami kampą β.)

Taigi vienas veidrodis leidžia stebėti grupę D_1, o du veidrodžiai, sustatyti šalia $180°/n$ kampu vienas kito atžvilgiu,— grupę D_n. Dabar vieną šalia kito sustatykime tris vienodus veidrodžius taip, kad jie sudarytų taisyklingą trikampę prizmę. Išeis visiems pažįstamas žaislas — kaleidoskopas. Trys gretimų veidrodžių poros realizuoja kiekvienoje poroje grupę, nes kampai tarp šių veidrodžių lygūs $60°=180°/3$. Bet koks daiktas, esantis šios veidrodinės prizmės viduje, bus matomas kartu su dvylika savo atvaizdų, išdėstytų po penkis apie kiekvieną viršūnę (trys iš šių atvaizdų bus bendri dviem grupėms D_3). Beje, daikto atvaizdai dar atsispindės „atspindėtuose" veidrodžiuose, ir jeigu veidrodžiai būtų idealūs (t. y. nesugertų dalies šviesos spindulių), matytume įspūdingą paveikslą — be galo daug pradinio daikto atvaizdų, taisyklingai išsidėsčiusių trikampėse veidrodžių grotelėse. Kaleidoskopuose, kurių yra parduotuvėse, vietoj veidrodžių įdėti paprasti plokštieji stiklai: jie atspindi dalį spindulių (ir gana didelę, jei spinduliai sudaro nedidelį kampą su veidrodžių plokštuma).

Pratimai

97. Ant biliardo stalo, turinčio stačiakampio $ABCD$ formą, guli du rutuliai M ir N. Kokia kryptimi reikia pastumti rutulį M, kad jis:

a) atsimušęs nuo stalo sienelės AB, pataikytų į rutulį N;

b) prieš pataikydamas į rutulį N, rutulys M nuosekliai atsimuštų nuo sienelių: 1) AB ir CD; 2) AB ir BC; 3) AB, BC, CD, DA. (Biliardo rutulius laikykite taškais; priminsime, jog biliardo rutulys nuo sienelės atsimuša taip, kad „kritimo kampas yra lygus atspindžio kampui".)

6. Plokščiosios gardelės. Simetrijos požiūriu pačios turtingiausios plokštumos geometrijos figūros — *ornamentai,* užpildantys visą plokštumą; juos galima lygiagrečiai stumti dviem nelygiagrečiomis kryptimis; tuo jie skiriasi nuo tiesinių ornamentų.

A p i b r ė ž i m a s. **Figūra Φ vadinama plokščiuoju ornamentu, kai jos simetrijų grupei G_Φ priklauso nekolinearieji lygiagretieji postūmiai, be to, tarp visų nenulinių postūmių $\vec{c} \in G_\Phi$ yra mažiausio ilgio postūmis.**

Remiantis šiuo apibrėžimu, galima įrodyti, kad iš postūmių $\vec{c} \in G_\Phi$ tarpo galima išrinkti du postūmius $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ ir tokius, kad bet koks trečiasis postūmis iš G_Φ bus išreiškiamas lygybe $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$; čia m ir n — sveikieji skaičiai. Atkreipiame dėmesį, kad, koks bebūtų taškas A, visi galimi taškai

$$\vec{c}(A) = (m\vec{a} + n\vec{b})(A)$$

sudaro plokštumoje lygiagretainių gardeles.

Ornamentų yra labai daug: dekoratyviojo meno meistrai juos kuria jau labai seniai. 86 paveiksle pavaizduoti senovės ornamentai. Tačiau išnagrinėtieji pavyzdžiai rodo, kad labai įvairių geometrinių formų ornamentai dažnai turi vienodos struktūros simetrijų grupes. Pasirodo, kad yra tik 17 tipų plokščiųjų ornamentų, turinčių skirtingos struktūros simetrijas. Šios 17 simetrijų grupių žinomos jau labai seniai; pavyzdžiui, jos visos buvo panaudotos dar XIII a., puošiant arabų sultonų (Alhambros) rūmus Granadoje. Tačiau tik 1891 m. rusų kristalografas J. Fiodorovas įrodė, kad tokių grupių yra 17; analogiškų erdvinių simetrijų grupių yra 230.

Šiomis pastabomis baigsime nagrinėti simetriją, dar kartą pabrėždami, kad ją nagrinėjome tik geometriniu požiūriu.

MATEMATINĖS LOGIKOS ELEMENTAI

TEIGINIŲ LOGIKA

1. Klasikinė logika. Sugebėjimas teisingai samprotauti reikalingas bet kurioje žmogaus veiklos srityje: moksle ir technikoje, teisėje ir diplomatijoje, liaudies ūkio planavime ir karo mene. Nors šis sugebėjimas atėjo iš amžių glūdumos, tačiau logika, t. y. mokslas apie tai, kokios samprotavimų formos yra teisingos, atsirado tik daugiau kaip prieš du tūkstančius metų. Ji buvo nagrinėta IV a. pr. m. e. didžiojo senovės graikų filosofo Aristotelio bei jo mokinių ir pasekėjų darbuose. Aristotelis išnagrinėjo įvairias samprotavimų formas, jų kombinacijas, įvedė *silogizmo* sąvoką, t. y. tokio samprotavimo, kai iš dviejų tvirtinimų išplaukia trečiasis, pavyzdžiui: „Visi žinduoliai turi griaučius. Visi banginiai — žinduoliai. Vadinasi, visi banginiai turi griaučius". Toks pat yra silogizmas „Visi kvadratai — rombai, visi rombai — lygiagretainiai. Vadinasi, visi kvadratai — lygiagretainiai". Apibendrintas silogizmas turi formą: „Visi a yra b; visi b yra c. Vadinasi, visi a yra c". O štai netaisyklingos formos silogizmas: „Visi kvadratai — rombai. Kai kurie rombai turi smailų kampą. Kai kurie kvadratai turi smailų kampą". Nors abu tvirtinimai, iš kurių padaryta išvada, yra teisingi, bet pati išvada, kad yra kvadratų su smailiuoju kampu, klaidinga. Vadinasi, silogizmas, turintis formą „visi a yra b, kai kurie b yra c. Vadinasi, kai kurie a yra c" gali būti klaidingų išvadų priežastis. Aristotelis išskyrė visas teisingas silogizmų formas, kai silogizmai sudaromi iš šių tvirtinimų: „Visi a yra b", „ Kai kurie a yra b", „Visi a nėra b" ir „Kai kurie a nėra b". Logika, pagrįsta silogizmų teorija, vadinama *klasikine.*

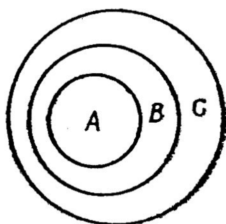
Įrodyta, kad iš tokių tvirtinimų galima sudaryti iš viso 256 silogizmus. Teisingi bus tik 24. Norėdami patikrinti, ar silogizmas yra teisingas, galime taikyti metodą, pagrįstą aibių teorija. Tvirtinimai, iš kurių sudaromi silogizmai, iš esmės yra teiginiai apie aibes. Pavyzdžiui, tvirtindami, kad „visi a yra b", turime galvoje, jog visų a aibė A yra visų b aibės B poaibis ($A \subset B$). Teigdami, kad „kai kurie a yra b", galime sakyti, jog aibių A ir B sankirta yra netuščia[1] $A \cap B \neq \varnothing$. Tvirtinimas „Nė vienas a nėra b" reiškia, kad A ir B neturi bendrų elementų, t. y. $A \cap B = \varnothing$, o tvirtinimas „Kai kurie a nėra b" reiškia, kad A nėra aibės B poaibis, t. y. $A \not\subset B$.

Kadangi aibes galima vaizduoti geometrinėmis figūromis, loginius samprotavimus taip pat galima pavaizduoti geometriškai.

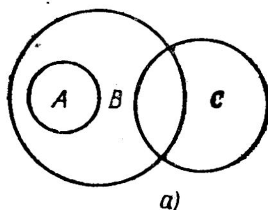
[1] Turima galvoje, kad A ir B — netuščios aibės.

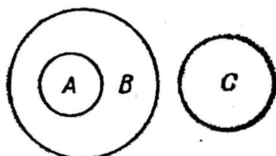
Pavyzdžiui, 1 paveikslas paaiškina, kad tada, kai visi *a* yra *b*, o visi *b* yra *c*, tai visi *a* yra *c* (kai $A \subset B$ ir $B \subset C$, tai $A \subset C$). 2 paveikslas paaiškina silogizmą „Kai visi *a* yra *b* ir nė vienas *b* nėra *c*, tai nė vienas *a* nėra *c*" (kai $A \subset B$ ir $B \cap C = \varnothing$, tai $A \cap C = \varnothing$). O 3 paveikslas, *a*, paaiškina, kodėl neteisingas silogizmas „Visi *a* yra *b*, kai kurie *b* yra *c*. Vadinasi, kai kurie *a* yra *c*". Nors $A \subset B$ ir $B \cap C \neq \varnothing$, bet $A \cap C$ gali būti ir tuščia aibė. Beje, 3 paveiksle, *b*, parodyta, kai $A \subset B$, $B \cap C \neq \varnothing$ ir $A \cap C \neq \varnothing$, t. y. kai kurie *a* yra *c*. Tai rodo, kad iš neteisingai sukonstruoto samprotavimo ne visada išplaukia klaidinga išvada: kartais gali atsitikti ir taip, kad išvada bus teisinga. Bet logika laiko leistinomis tik tokias samprotavimų formas, kurios visais atvejais garantuoja teisingą išvadą, jei tik pradiniai tvirtinimai yra teisingi. Išnagrinėtą loginių samprotavimų geometrinės iliustracijos metodą pasiūlė didysis XVIII a. matematikas, Peterburgo akademikas Leonardas Oileris (1707—1783); šį metodą dažnai taikė anglų matematikas Džonas Venas (1834—1923). Todėl tokie piešiniai vadinasi Oilerio—Veno diagramomis. Tačiau sudėtingesniais atvejais šias diagramas vartoti sunku.

Žinome, kad XVI a. algebrinių reiškinių užrašymo žodinė forma trukdė mokslo plėtotei ir, siekiant palengvinti algebrinius pertvarkymus, buvo sukurta raidinė simbolika; ją vartojant, galima buvo pertvarkyti reiškinius pagal griežtai apibrėžtas taisykles. Lygiai taip pat, norint lengviau patikrinti ir pertvarkyti sudėtingas samprotavimų grandines, buvo sukurtas specialus raidinis skaičiavimas. Jis buvo pavadintas logikos algebra, arba matematine logika. Matematinės logikos pagrindus XVII a. sukūrė didysis vokiečių matematikas G. Leibnicas (1646—1716). XIX a. viduryje airių matematikas ir logikas Džordžas Bulis (1815—1864) buvo matematinės logikos, kaip mokslinės disciplinos, pradinin-

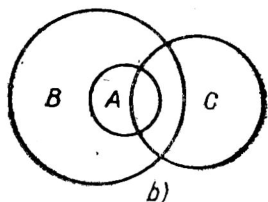


1 pav.





2 pav.



3 pav.

kas. Paprastoje algebroje raidės žymi skaičius, o operacijos su jomis simbolizuoja atitinkamas operacijas su skaičiais; logikos algebroje raidės (paprastai didžiosios lotyniškos) žymi teiginius, o operacijos su jomis simbolizuoja operacijas su teiginiais. Matematinėje logikoje, kaip ir įprastinėje logikoje, yra tapatybių, teisingų su bet kokiais teiginiais. Pirmasis mūsų uždavinys — susipažinti su pagrindinėmis operacijomis teiginių aibėje.

Pratimai

1. Nubraižykite Oilerio—Veno diagramas, iliustruojančias tvirtinimus:

a) visi x yra y;
b) kai kurie x yra y;
c) nė vienas x nėra y;
d) kai kurie x nėra y.

2. Įrodykite, kad iš sakinio „Kai kurie x yra y“ išplaukia sakinys „Kai kurie y yra x“.

3. Įrodykite, kad nė vienas y nėra x, kai nė vienas x nėra y.

4. Nubraižykite Oilerio—Veno diagramas, kurioms būtų klaidingi abu teiginiai: „Visi x yra y“ ir „Nė vienas x nėra y“.

5. Ar iš sakinio „Visi x yra y ir kai kurie y yra z“ išplaukia tvirtinimas „Kai kurie x yra z“?

6. Ar teisingas tokios formos samprotavimas: „Visi x yra y ir kai kurie y yra z; vadinasi, kai kurie z yra x“?

7. Ar teisingas tokios formos samprotavimas: „Visi x yra y ir kai kurie y nėra z; vadinasi, kai kurie x nėra z“?

8. Ar teisingas tokios formos samprotavimas: „Nė vienas x nėra y ir kai kurie y yra z; vadinasi, kai kurie z nėra x“?

9. Ar teisingas tokios formos samprotavimas: „Visi x yra y ir nė vienas x nėra z; vadinasi, visi y nėra z“?

10. Ar teisingas tokios formos samprotavimas: „Kai tam tikri x yra y, o tam tikri y yra z, tai kai kurie x yra z“?

11. Ar teisingas tokios formos samprotavimas: „Jei kurie nors y yra x, kurie nors y yra z ir kurie nors z yra x, tai kurie nors x kartu yra ir y, ir z“?

12. Sukonstruokite šių samprotavimų raidinę formą ir, remdamiesi Oilerio—Veno diagramomis, patikrinkite, ar teisinga ši forma:

a) jei visi kvadratai yra stačiakampiai, tai kai kurie stačiakampiai nėra kvadratai;

b) jei nė vienas banginis nesugeba skraidyti, tai nė vienas skraidantis daiktas nėra banginis;

c) jei visus liūtus galima prijaukinti ir visi liūtai yra plėšrūnai, tai visus plėšrūnus galima prijaukinti;

d) jei kai kuriuos plėšrūnus galima prijaukinti ir visi liūtai — plėšrūnai, tai kai kuriuos liūtus galima prijaukinti;

e) jei visus plėšrūnus galima prijaukinti ir visus liūtus galima prijaukinti, tai visi liūtai — plėšrūnai;

f) jei visus plėšrūnus galima prijaukinti ir visi liūtai — plėšrūnai, tai visus liūtus galima prijaukinti;

g) jei visi zuikiai — plėšrūnai ir nė vienas zuikis negali skraidyti, tai kai kurie plėšrūnai negali skraidyti;

h) jei nė vienas banginis nėra žuvis ir visos lydekos — žuvys, tai nė viena lydeka nėra banginis;

i) jei nė vienas liūtas nėra žuvis ir visi liūtai gyvena sausumoje, tai nė viena žuvis negyvena sausumoje.

Kuriuose pavyzdžiuose iš neteisingai sukonstruotų samprotavimų išplaukė klaidingos išvados? Teisingos išvados? Kuriais atvejais iš klaidingų pradinių prielaidų gaunamos teisingos išvados?

13. Išanalizuokite šiuos samprotavimus:

a) Visi rašytojai — meno veikėjai. Kai kurie meno veikėjai — talentingi žmonės. Vadinasi, kai kurie rašytojai yra talentingi.

b) Visi žmonės yra mirtingi. Visi žmonės — gyvos būtybės. Vadinasi, visos gyvos būtybės yra mirtingos.

c) Visos katės yra žuvys; visos žuvys turi po keturias kojas. Vadinasi, katė turi keturias kojas.

d) Kai kurie stuburiniai gyvūnai yra žinduoliai, o kai kurie stuburiniai gyvūnai yra varlės. Vadinasi, kai kurios varlės — stuburiniai gyvūnai.

Kurie šių samprotavimų yra teisingos formos? Kuriuose jų yra teisingos prielaidos? Kuriuose jų yra teisingos išvados? Ar galima iš klaidingų prielaidų teisingais samprotavimais gauti teisingą išvadą?

2. Teiginiai. Svarbiausia matematinės logikos sąvoka yra *teiginys*. Taip vadinamas bet kuris tiesioginis sakinys, apie kurį žinome, kad jis yra arba *teisingas*, arba *klaidingas*. Teiginius galima išreikšti žodžiais, taip pat matematiniais, cheminiais ir kitokiais simboliais. Pavyzdžiui:

a) Marsas yra toliau nuo Saulės negu Venera (teisingas teiginys);

b) $2+6>8$ (klaidingas teiginys);

c) II+VI>VIII (klaidingas teiginys);

d) skaičių 2 ir 6 suma yra didesnė už 8 (klaidingas teiginys);

e) mūsų Galaktikoje yra nežemiškų civilizacijų (šis teiginys, be abejo, yra arba teisingas, arba klaidingas, bet kol kas nežinome, koks jis yra iš tiesų).

Aišku, kad b), c) ir d) teiginiai tvirtina tą patį, tik jie išreikšti skirtingais ženklais ir žodžiais. Čia neanalizuosime tiriamų teiginių prasmės, o tik išsiaiškinsime, kokie jie: teisingi ar klaidingi.

Ne kiekvienas sakinys yra teiginys. Pavyzdžiui, klausiamieji ir šaukiamieji sakiniai nėra teiginiai („Kokios spalvos šis namas?“, „Gerkite pomidorų sultis!“, „Stok!“ ir t. t.). Apibrėžimai taip pat nėra teiginiai, pavyzdžiui, „Pusiaukraštine vadinama at-

karpa, jungianti trikampio viršūnę su priešingos kraštinės vidurio tašku",— čia tik tam tikram objektui suteikiamas pavadinimas; šį pavadinimą galėjome suteikti ir kitam objektui, tarkime, spinduliui, dalijančiam pusiau trikampio vidaus kampą, arba tą patį objektą galėjome pavadinti kitaip. Taigi apibrėžimai negali būti klaidingi arba teisingi, jie tik parodo, kokie terminai vartojami.

Nėra teiginiai ir tokie sakiniai: „Jo akys pilkos" arba „$x^2-4x+3=0$". Juose nenurodyta, apie kokį žmogų kalbama arba su kuriuo skaičiumi x yra teisinga lygybė $x^2-4x+3=0$. Tokie sakiniai su kintamaisiais vadinami *teiginių formomis*. Jas nagrinėsime kitame skyriuje. Pabrėšime, kad sakiniai „Kai kurių žmonių akys pilkos" arba „Su kiekvienu x yra teisinga lygybė $x^2-4x+3=0$" jau yra teiginiai (pirmasis yra teisingas, o antrasis — klaidingas).

Pratimai

14. Kurie šių sakinių yra teiginiai:

a) Mėnulis — Žemės palydovas;

b) visi mokiniai mėgsta matematiką;

c) prašom atnešti man knygą;

d) kai kurių žmonių akys yra mėlynos;

e) apskritimu vadinama aibė visų plokštumos taškų, kurių kiekvienas yra nutolęs nuo šios plokštumos duotojo taško tam tikru atstumu;

f) jūs buvote teatre?

15. Kurie duotųjų sakinių yra teisingi, o kurie — klaidingi teiginiai:

a) skaičius -2 yra mažesnis už skaičių 0;

b) skaičių 7 padaliję iš nulio, gauname nulį;

c) skaičių 5 ir x suma yra lygi 10;

d) egzistuoja toks realusis skaičius x, su kuriuo $2x+5=15$;

e) $(13-2\cdot7)\cdot4=-4$;

f) visi trikampiai — lygiašoniai;

g) trikampio pusiaukraštine vadinamas statmuo, nuleistas iš trikampio viršūnės į priešingą kraštinę;

h) ar žinote, kokios yra birželio naktys?

16. Tarp šių užrašų išskirkite teiginius ir pasakykite, ar jie teisingi, ar klaidingi:

a) $\frac{1917}{852}=\frac{9}{4}$;

b) $675+872>(6^3+7^3+5^3)+(8^3+7^3+2^3)$;

c) $8833>88^2+33^2$;

d) $(4+\sqrt{7})(4-\sqrt{7})=3^2$;

e) $\{a, b, c\}=\{c, a, b\}$;

f) $x^2-8x+15=0$;

g) $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$;
h) $\{a\}\in\{a, b, c\}$;
i) $a\subset\{a, b, c\}$;
j) $\{a\}\subset\{a, b, c\}$;
k) $a\in\{a, b, c\}$;
l) $\{a\}\in\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$;
m) $(AB)\parallel(AB)$;
n) $(AB)\perp(AB)$;
o) $\widehat{AOB}=\frac{\pi}{2}$;
p) visada $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$.

3. Paprastieji ir sudėtiniai teiginiai. Kai kuriuos teiginius galima išskaidyti į atskiras dalis, be to, taip, kad kiekviena tokia dalis būtų savarankiškas teiginys. Pavyzdžiui, teiginį „Šiandien 4 h dienos aš buvau mokykloje, o 6 h vakaro išėjau į čiuožyklą" sudaro dvi dalys: „Šiandien 4 h dienos aš buvau mokykloje" ir „Šiandien 6 h vakaro aš išėjau į čiuožyklą". Teiginį gali sudaryti ir daugiau dalių.

Teiginį, kurį galima išskaidyti į dalis, vadinsime *sudėtiniu*, o neskaidų teiginį vadinsime *paprastuoju*. Žinome, kad, taikant sudėtį, atimtį, daugybą ir dalybą, taip pat operacijomis, kuriomis konstruojami priešingieji ir atvirkštiniai skaičiai, iš duotųjų skaičių gaunami nauji skaičiai. Panašiai iš duotųjų teiginių operacijomis, kurios vadinamos „konjunkcija", „disjunkcija", „implikacija", „ekvivalencija" ir „teiginio neigimas", išvedami nauji teiginiai. Nors šių operacijų pavadinimai skamba neįprastai, jie reiškia tik tai, kad atskiri sakiniai jungiami jungtimis „ir", „arba", „jei . . . , tai . . .", „tada ir tik tada, kai . . .", arba kad prie teiginio prijungiama dalelytė „ne". Tačiau jei buitinėje kalboje šias jungtis ir dalelytes vartojame, nesilaikydami griežtų taisyklių, todėl kartais vieną ir tą patį sakinį galima traktuoti įvairiai, tai matematinėje logikoje kiekvieno žodžio prasmė yra griežtai apibrėžta. Norint, kad buitinė tų žodžių prasmė neturėtų įtakos jų vartojimui, pačios jungtys keičiamos tam tikrais ženklais.

Pratimai

17. Duoti teiginiai: A: „Žemė sukasi apie Saulę" ir B: „Žemė yra rutulio formos". Iš jų sudarykite sudėtinius teiginius ir pabraukite žodžius, kurių pagalba pastarieji sudaryti.

18. Kurie šių teiginių yra sudėtiniai? Išskirkite juose paprastuosius teiginius ir kiekvieną jų pažymėkite raide. Raidėmis parašykite kiekvieną sudėtinį teiginį.

a) Per matematikos pamoką mokiniai atsakinėjo į mokytojo klausimus ir rašė savarankišką darbą.

b) Mes eisime čiuožti arba slidinėti.

c) Kai duotojo keturkampio įstrižainės yra vienodo ilgio, tai šis keturkampis — rombas.

d) $-17 \leqslant 0$.

e) Skaičius 15 dalijasi iš 3 tada ir tik tada, kai šio skaičiaus skaitmenų suma dalijasi iš 3.

4. Neigimas. Išnagrinėkime šiuos teiginius:

A: „Šiandien 12 h aš buvau čiuožykloje".

B: „Šiandien aš buvau čiuožykloje ne 12 h".

C: „Čiuožykloje 12 h aš buvau ne šiandien".

D: „Šiandien 12 h aš buvau kine".

E: „Šiandien aš buvau čiuožykloje 15 h.

F: „Šiandien 12 h aš buvau čiuožykloje".

Iš pirmo žvilgsnio atrodo, kad teiginiai *B—F* neigia teiginį *A*. Bet iš tikrųjų taip nėra. Jei atidžiai perskaitytume teiginį *B*, pastebėtume, kad abu teiginiai, ir *A*, ir *B*, gali kartu būti klaidingi — taip bus, jei šiandien aš visai nebuvau čiuožykloje. Tą patį galima pasakyti ir apie teiginius *A* ir *C*, *A* ir *D*. O štai teiginiai *A* ir *E* gali būti ir teisingi kartu (kai aš, pavyzdžiui, čiuožinėjau nuo 11 h iki 16 h), ir kartu klaidingi (jei šiandien aš visai nebuvau čiuožykloje). Ir tik teiginys *E* turi tokią savybę: jis teisingas tik tada, kai teiginys *A* yra klaidingas, ir klaidingas tik tada, kai teiginys *A* yra teisingas. Jis vadinamas teiginio *A* neiginiu.

Apskritai **teiginio *A* neiginiu vadinamas toks teiginys *B*, kuris yra klaidingas, kai *A* teisingas, ir kuris yra teisingas, kai *A* klaidingas.** Teiginio *A* neiginys žymimas $\bar{A}$ arba (ne *A*) (skaitoma „Ne *A*" arba „Netiesa, kad *A*").

Ši lentelė parodo, koks yra ryšys tarp *A* ir $\bar{A}$:

A	$\bar{A}$
T	*K*
K	*T*

Raidės „*T*" ir „*K*" — žodžių „tiesa" ir „klaida" santrumpos. Šie žodžiai logikoje vadinami teiginių *teisingumo reikšmėmis*.

Norint sukonstruoti tam tikro teiginio neiginį, paprastai prie tarinio reikia prijungti dalelytę „ne" arba, jei ji jau yra, ją praleisti. Pavyzdžiui, teiginio „Dabar dangus yra mėlynas" neiginys bus „Dabar dangus yra nemėlynas" arba „Dabar dangus nėra mėlynas". O teiginio „Barškuolė neturi stuburo" neiginys bus „Barškuolė turi stuburą".

Matematikoje dažnai teiginio neiginys, kai teiginys užrašytas vienais ar kitais simboliais, parašomas perbraukiant atitinkamą ženklą arba praleidžiant perbraukiantį brūkšnį. Pavyzdžiui, tei-

ginio $2+3=5$ neiginys yra $2+3\neq5$, o teiginio $a \nparallel b$ neiginys yra $a \parallel b$. Kartais vartojami ir kiti simboliai: teiginio $a<b$ neiginys yra $a\geqslant b$ — nelygybė $a<b$ yra teisinga tada ir tik tada, kai nelygybė $a\geqslant b$ yra klaidinga.

Pratimai

19. Sukonstruokite žemiau pateiktų teiginių neiginius. Raskite šių teiginių ir jų neiginių teisingumo reikšmes:

a) skaičius 5 — skaičiaus 542 daliklis;

b) automobilis neturi teisės važiuoti pirmyn, kai dega raudona šviesa;

c) yra lygiagretainių, kurių kampai statūs;

d) lygtis $2x^2-3x+1=0$ turi sveiką šaknį;

e) visos lygties $2x^2-3x+1=0$ šaknys yra sveikos;

f) visi natūriniai skaičiai dalijasi iš 2;

g) nėra natūrinio skaičiaus, kuris dalijasi iš 2;

h) egzistuoja sveikas skaičius, kuris dalijasi iš visų sveikųjų skaičių;

20. Duoti teiginiai:

a) egzistuoja nelyginiai pirminiai skaičiai;

b) egzistuoja lyginiai sudėtiniai skaičiai;

c) bet koks pirminis skaičius yra nelyginis;

d) neegzistuoja lyginiai pirminiai skaičiai.

Kuris jų yra teiginio „Egzistuoja lyginiai pirminiai skaičiai" neiginys?

21. Nustatykite, kurių porų sakiniai yra vieni kitų neiginiai, o kurių — ne. Paaiškinkite, kodėl.

a) $4<0$, $4>0$; b) $5<0$, $5\geqslant0$; c) trikampis ABC yra statusis; trikampis ABC yra smailusis; d) natūrinis skaičius 6 yra lyginis; natūrinis skaičius 6 yra nelyginis; e) jis yra mano draugas; jis mano priešas; f) visi pirminiai skaičiai yra lyginiai; visi pirminiai skaičiai yra nelyginiai; g) žmogus žino visas Žemėje gyvenančių gyvūnų rūšis; Žemėje yra gyvūnų rūšis, nežinoma žmogui; h) jis yra mano draugas; jis mano brolio draugas.

22. Sudarę duotųjų sakinių neiginius, įrodykite arba paneikite šiuos sakinius:

a) $2\leqslant2$; b) $3\leqslant5$; c) visi pirminiai skaičiai yra nelyginiai; d) nė viename lietuvių kalbos žodyje nėra dviejų gretimų vienodų balsių; e) jis mano draugas.

5. Teiginių konjunkcija ir disjunkcija. Teiginys „Skaičius 2 yra lyginis ir pirminis" yra sudėtinis teiginys; jis sudarytas iš dviejų teiginių „Skaičius 2 yra lyginis" ir „Skaičius 2 yra pirminis", sujungtų jungtimi „ir". Abu šie teiginiai teisingi. Laikoma, kad ir sudėtinis teiginys „Skaičius 2 yra lyginis ir pirminis" irgi teisingas. Teiginys „Skaičius 12 yra lyginis ir pirminis" laikomas klaidingu; jis sudarytas iš teiginių „Skaičius 12 yra lygi-

nis“ ir „Skaičius 12 yra pirminis“, kurių teisingas tik pirmasis. Klaidingu laikomas ir teiginys „Skaičius 12 yra nelyginis ir sudėtinis“ ir, aišku, teiginys „Skaičius 12 yra nelyginis ir pirminis“, kuris sudarytas iš dviejų klaidingų paprastųjų teiginių „Skaičius 12 yra nelyginis“ ir „Skaičius 12 yra pirminis“, sujungtų jungtimi „ir“.

Apskritai, **kai du teiginiai *A* ir *B* yra sujungti vienas su kitu jungtimi „ir“, gautas sudėtinis teiginys „*A* ir *B*“ laikomas teisingu tik tada, kai abu pradiniai teiginiai teisingi. Kai bent vienas jų klaidingas, sudėtinis teiginys „*A* ir *B*“ laikomas klaidingu.**

Teiginys „A ir B“, kuris yra teisingas, kai teisingi abu teiginiai A ir B, ir klaidingas, kai bent vienas jų yra klaidingas, vadinamas šių teiginių konjunkcija ir žymimas $A \wedge B$. Taigi teiginio $A \wedge B$ (skaitome „A ir B“) teisingumo lentelė yra tokia:

A	B	$A \wedge B$
T	T	T
T	K	K
K	T	K
K	K	K

Teiginių konjunkcijos pavyzdžiu mokyklinėje matematikoje gali būti dviguba nelygybė, pavyzdžiui $3<6<7$. Tokia nelygybė laikoma teisinga tik tada, kai teisingos abi ją sudarančios nelygybės; šį kartą tai nelygybės $3<6$ ir $6<7$. Dviguba nelygybė $3<6<4$ klaidinga. Mat nors nelygybė $3<6$ teisinga, bet nelygybė $6<4$ klaidinga. Konjunkcija yra ir teiginys „Bet kokio rombo įstrižainės yra statmenos ir rombo kampus dalija pusiau“, taip pat teiginys „Bet kokį sudėtinį skaičių galima išskaidyti pirminiais dauginamaisiais, ir šis skaidinys yra vienareikšmiškai apibrėžtas dauginamųjų tvarkos tikslumu“.

Teiginius galima sujungti vieną su kitu ne tik jungtimi „ir“, bet ir jungtimi „arba“, pavyzdžiui: „Ryt bus matematikos kontrolinis arba savarankiškas darbas“ (detaliau: „Ryt bus matematikos kontrolinis darbas arba ryt bus matematikos savarankiškas darbas“). „Kai paskutinis skaičiaus skaitmuo lygus 0 arba 5, šis skaičius dalijasi iš 5“ (detaliau: „Kai paskutinis skaičiaus skaitmuo lygus 0, šis skaičius dalijasi iš 5, arba, kai paskutinis skaičiaus skaitmuo lygus 5, šis skaičius dalijasi iš 5“).

Buitinėje kalboje jungtis „arba“ turi dvi skirtingas reikšmes — skiriamąją ir neskiriamąją. Pavyzdžiui, pažadėjęs „Ryt 12 h aš būsiu klube arba čiuožykloje“, negalėsiu išteseti abiejų pažadų: juk žmogus negali vienu ir tuo pačiu metu būti dviejose vietose. Čia jungtis „arba“ turėjo skiriamąją reikšmę. Bet pasakę „Ryt aš būsiu klube 12 h arba 18 h“, galime išteseti ir vieną, ir kitą

pažadą — juk žmogus gali ateiti į klubą du kartus per dieną. Šį kartą ta pati jungtis jau nebeturi skiriamosios prasmės.

Norėdami išvengti tokio neapibrėžtumo, matematikai sutarė, kad jungtis „arba" matematinėje logikoje bus vartojama suteikiant jai tik neskiriamąją reikšmę. Taigi matematinėje logikoje laikoma, kad **teiginys „*A* arba *B*" yra teisingas, kai teisingas bent vienas šių teiginių, ir yra klaidingas tik vieninteliu atveju, kai abu šie teiginiai yra klaidingi.** Teiginys „A arba B", kuris yra klaidingas tik tada, kai yra klaidingi abu teiginiai A, B, vadinamas šių teiginių *disjunkcija* ir žymimas $A \vee B$ (skaitoma „A arba B"). Taigi teiginio $A \vee B$ teisingumo lentelė yra tokia:

A	B	$A \vee B$
T	T	T
T	K	T
K	T	T
K	K	K

Teiginių disjunkcijos pavyzdys matematikoje — negriežta nelygybė, pavyzdžiui $3 \leqslant 7$. Tokia nelygybė laikoma teisinga, kai teisingas bent vienas iš ją sudarančių teiginių $3<7$, $3=7$. Todėl teiginiai $3 \leqslant 7$ ir $3 \leqslant 3$ teisingi (pirmasis todėl, kad teisinga nelygybė $3<7$, o antrasis — todėl, kad teisinga lygybė $3=3$). Nelygybė $7 \leqslant 3$ klaidinga, nes klaidingi abu teiginiai $7<3$ ir $7=3$. Disjunkcija yra ir teiginys „Duotasis keturkampis yra stačiakampis arba rombas". Šį kartą gali būti teisingi ir abu teiginiai (jei keturkampis bus kvadratas).

Pratimai

23. Kurie šių sudėtinių teiginių yra konjunkcijos, disjunkcijos ir kokie jie — teisingi ar klaidingi?

a) Skaičius 27 yra kartotinis 3 ir 9;

b) $17<42<18$;

c) skaičius 2 — pirminis arba lyginis;

d) trikampis ABC yra smailusis, statusis arba bukasis;

e) trikampis ABC yra įvairiakraštis, lygiašonis arba lygiakraštis;

f) bet kurio lygiagretainio įstrižainės yra statmenos ir dalija viena kitą pusiau;

g) $\sqrt{16}=-4$, bet $-4 \neq (-2)^2$;

h) $7^2=49$ ir $(-7)^2=49$;

i) jei trikampis lygiašonis, tai jis yra lygiakraštis;

j) apskritimas negali būti nei įgaubtas, nei neuždaras;
k) $21 \leqslant 21$;
l) $21 \leqslant 18$.

24. Duoti teiginiai: A: „Aš nusipirkau dviratį", B: „Aš dalyvavau dviračių lenktynėse", C: „Aš keliavau po TSRS". Suformuluokite teiginius, atitinkančius šiuos reiškinius:

a) $A \wedge B$; b) $A \vee B$; c) $\bar{A} \wedge B$; d) $\bar{A} \vee B \vee \bar{C}$; e) $\overline{A \wedge B}$; f) $\overline{A \vee C}$; g) $\bar{A} \vee \bar{C}$; h) $(\bar{A} \wedge \bar{B}) \vee C$.

25. Remdamiesi 24 pratimo teiginiais A, B ir C bei teiginių algebros simbolika, parašykite šiuos teiginius:
a) aš nekeliavau po TSRS;
b) aš nusipirkau dviratį ir dalyvavau lenktynėse;
c) aš nekeliavau po TSRS ir nedalyvavau lenktynėse;
d) aš nusipirkau dviratį, bet nekeliavau po TSRS;
e) aš keliavau po TSRS ir nedalyvavau lenktynėse;
f) aš nusipirkau dviratį arba keliavau po TSRS;
g) aš nenusipirkau dviračio arba nedalyvavau lenktynėse.

6. Teiginių implikacija ir ekvivalencija. Samprotavimai dažniausiai reiškiami teiginių grandinėmis. Šie teiginiai paprastai yra sąlyginio pobūdžio, t. y. tvirtina, kad tam tikras teiginys yra teisingas, kai teisingas kitas, pavyzdžiui: „Jei duotojo trikampio šoninės kraštinės kongruenčios, tai kampai prie pagrindo taip pat yra kongruentūs". Bendra šių teiginių forma tokia: „Jei A teisingas, tai ir B teisingas", arba trumpiau: „Jei A, tai B". Toks teiginys vadinamas teiginių A ir B *implikacija* ir žymimas $A \rightarrow B$. Teiginys A vadinamas *sąlyga,* o B — *išvada.* Pavyzdžiui, tarkime, kad A yra teiginys „Dabar geras oras" ir B —„Aš eisiu pasivaikščioti". Tuomet $A \rightarrow B$ reiškia „Jei dabar geras oras, aš eisiu pasivaikščioti". Aišku, kad jei dabar blogas oras, tai pasakiusio šį sakinį negalima pavadinti melagiu nei tuomet, kai jis eis pasivaikščioti, nei tuomet, kai jis neis pasivaikščioti. Todėl implikaciją, kurios sąlyga yra klaidinga, reikia laikyti teisinga ir tada, kai išvada klaidinga, ir tada, kai ji teisinga. Sakoma, kad tokia implikacija yra teisinga trivialiu būdu. Teiginys $A \rightarrow B$ teisingas ir tada, kai A ir B teisingi. Vienintelis variantas, kada implikacija $A \rightarrow B$ klaidinga, yra tada, kai sąlyga teisinga, o išvada klaidinga.

Taigi **teiginių A ir B implikacija vadinamas teiginys $A \rightarrow B$ (jei A, tai B), kuris klaidingas tik tada, kai A teisingas, o B klaidingas.** Implikacijos teisingumo lentelė yra tokia:

A	B	$A \rightarrow B$
T	T	T
T	K	K
K	T	T
K	K	T

Teiginys „A tada ir tik tada, kai B“ vadinamas teiginių A ir B *ekvivalencija* ir žymimas $A \leftrightarrow B$. Laikoma, kad **dviejų teiginių ekvivalencija yra teisinga tada ir tik tada, kai abu šie teiginiai yra teisingi arba abu yra klaidingi.** Todėl teiginių A ir B ekvivalencijos teisingumo lentelė yra tokia:

A	B	$A \leftrightarrow B$
T	T	T
T	K	K
K	T	K
K	K	T

Pratimai

26. Išskirkite elementariuosius teiginius, iš kurių sudaryti šie sudėtiniai teiginiai; nurodykite teisingas implikacijas:

a) jei skaičius 48 yra kartotinis 8, jis bus kartotinis 4;
b) jei $-3<-1$, tai $3^2=6$;
c) jei $\lg 100=10$, tai šuo turi keturias kojas;
d) jei $2\cdot2=5$, tai yra ir raganų.

27. Duoti teiginiai:
A: „keturkampis $MNPQ$ — lygiagretainis“;
B: „keturkampio $MNPQ$ įstrižainės susikirtimo taške dalijasi pusiau“.
Suformuluokite žodžiais teiginius ir nustatykite, teisingi jie ar klaidingi:

a) $A \to B$; b) $B \to A$; c) $\bar{A} \to B$; d) $\bar{B} \to A$; e) $\bar{A} \to \bar{B}$; f) $\bar{B} \to \bar{A}$; g) $A \to \bar{B}$; h) $(A \to B) \wedge (B \to A)$.

28. Raskite šių teiginių teisingumo reikšmes:

a) jei 16 dalijasi iš 4, tai 16 dalijasi iš 2;
b) jei 17 dalijasi iš 4, tai 17 dalijasi iš 2;
c) jei 18 dalijasi iš 4, tai 18 dalijasi iš 2;
d) jei 18 dalijasi iš 2, tai 18 dalijasi iš 4;
e) jei $2\cdot2=5$, tai $8^3\neq500$;
f) jei $2\cdot2=4$, tai $7^2=81$;
g) jei egzistuoja telepatija, reikia iš naujo patikrinti kai kuriuos fizikos dėsnius;
h) 16 dalijasi iš 4 tada ir tik tada, kai 16 dalijasi iš 2;
i) 17 dalijasi iš 4 tada ir tik tada, kai 17 dalijasi iš 2;
j) 18 dalijasi iš 4 tada ir tik tada, kai 18 dalijasi iš 2;
k) 15 dalijasi iš 5 tada ir tik tada, kai 15 dalijasi iš 10.

29. Žinodami, kokie yra duotieji sudėtiniai teiginiai, nustatykite A ir B teisingumo reikšmę:

a) „jei 2 — pirminis skaičius, tai A“ — teisingas teiginys;
b) „jei B, tai 2 — sudėtinis skaičius“ — teisingas teiginys;

c) „jei 2 — pirminis skaičius, tai B“ — klaidingas teiginys;
d) „jei A, tai 2 — sudėtinis skaičius“ — klaidingas teiginys;
e) „$A \leftrightarrow (2<3)$“ — teisingas teiginys;
f) „$B \leftrightarrow (2>3)$“ — teisingas teiginys;
g) „$A \leftrightarrow (2>3)$“ — klaidingas teiginys;
h) „$B \leftrightarrow (2<3)$“ — klaidingas teiginys.

30. Duoti teiginiai:

A: „Skaičius 729 yra kartotinis 9“;
B: „Skaičiaus 729 skaitmenų suma yra kartotinė 9“.

Suformuluokite teiginius:

a) $A \to B$; b) $B \to A$; c) $A \leftrightarrow B$.

31. Žinodami, kad M — teiginys „Trikampis ABC yra lygiašonis“, o N — teiginys „Dvi trikampio ABC aukštinės yra kongruenčios“, išnagrinėkite teiginius:

a) $M \to N$; b) $N \to M$; c) $M \leftrightarrow N$; d) $(M \to N) \wedge (N \to M)$. Kurie jų teisingi, o kurie — klaidingi?

7*. Logikos algebra. Iš skaičių 1, 3, 24, 43, remiantis sudėtimi, atimtimi, daugyba ir dalyba, galima sudaryti įvairius skaitinius reiškinius, pavyzdžiui: $1+3$, $3 \cdot 24 - 43$, $24 : (3-1) \cdot 43$ ir t. t. Analogiškai iš duotųjų konkrečių teiginių A, B, C, D, pritaikius logines operacijas, galima sudaryti įvairių sudėtinių teiginių, pavyzdžiui: $(\bar{A} \vee \bar{B}) \to (C \wedge \bar{D})$. Mokykloje nagrinėjamos skaitinių reiškinių bendrosios savybės, kurios išreiškiamos lygybėmis, sudarytomis iš raidžių; lygybės yra teisingos, kokios bebūtų šių raidžių skaitinės reikšmės, pavyzdžiui: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $a + b = b + a$. Matematikos dalis, nagrinėjanti bendrąsias skaitinių reiškinių savybes, vadinama *algebra*. Panašiai *logikos algebra* vadinamas matematinės logikos skyrius, kuriame nagrinėjamos reiškinių, sudarytų iš teiginių, bendrosios savybės. Skaitytojas žino, kad, nagrinėjant bendrąsias algebrinių operacijų savybes, įprastinėje algebroje skaičiai pakeičiami raidėmis; pavyzdžiui, rašoma $ab = ba$, arba $a(b+c) = ab + ac$. Logikos algebroje taip pat vartosime raides, kuriomis žymėsime ne tik konkrečius teiginius („Maskva — TSRS sostinė“ „$2 \cdot 2 = 4$“ ir t. t.), bet ir *loginius kintamuosius*. Tuomet raidė reikš kintamąjį, kuris gali įgyti tik dvi reikšmes T ir K (tiesa ir klaida).

Jei iš loginių kintamųjų sudarytume reiškinį, susieję šiuos kintamuosius pagal tam tikras taisykles simboliais $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ ir neigimo ženklais, gautume loginį reiškinį, kuris su vienomis kintamųjų teisingumo reikšmėmis bus teisingas, o su kitomis klaidingas (pavyzdžiui, $A \wedge B$ yra teisingas, kai $A = T$ ir $B = T$, ir klaidingas, kai $A = T$ ir $B = K$). Apskaičiavę reiškinio teisingumo reikšmes, kurias jis įgyja su įvairiomis įeinančių į jį loginių kintamųjų teisingumo reikšmių kombinacijomis, gauname lentelę, kuri vadinama loginio reiškinio teisingumo lentele. Pavyzdžiui, reiškinio $\bar{A} \wedge B$ teisingumo lentelė yra tokia:

A	B	$\bar{A}$	$\bar{A}\wedge B$
T	T	K	K
T	K	K	K
K	T	T	T
K	K	T	K

Gali būti taip, kad dviejų skirtingos išraiškos loginių reiškinių teisingumo lentelės yra vienodos. Pavyzdžiui, sudarykime reiškinių $\bar{A}\vee B$ ir $A\to B$ teisingumo lenteles:

A	B	$\bar{A}$	$\bar{A}\vee B$	$A\to B$
T	T	K	T	T
T	K	K	K	K
K	T	T	T	T
K	K	T	T	T

Šios lentelės du paskutinieji stulpeliai sutampa. Tai reiškia, kad $A\to B$ ir $\bar{A}\vee B$ skiriasi vienas nuo kito ne daugiau, negu įprastoje algebroje skiriasi reiškiniai $a+b$ ir $b+a$ — nors jie yra skirtingos formos, bet su visomis įeinančių į juos kintamųjų reikšmėmis įgyja vienodas reikšmes. Algebroje tokie reiškiniai vadinami lygiais ir rašoma $a+b=b+a$. Logikos algebroje tokius du loginius reiškinius įprasta vadinti logiškai ekvivalenčiais ir rašyti $X\Leftrightarrow Y$. Taigi

$$A\to B\Leftrightarrow \bar{A}\vee B. \qquad (1)$$

Atkreipsime dėmesį, kad sąvokos ekvivalencija ir ekvivalentumas yra skirtingos. Ekvivalencija yra *loginė operacija*, kuria iš teiginių A ir B sukonstruojame naują teiginį $A\leftrightarrow B$; ekvivalentumas yra *sąryšis* tarp dviejų sudėtinių teiginių, reiškiantis, kad jų teisingumo reikšmės visada yra vienodos. Šių dviejų sąvokų ryšį apibūdina toks tvirtinimas.

Loginiai reiškiniai X ir Y ekvivalentūs tada ir tik tada, kai ekvivalencija $X\leftrightarrow Y$ yra teisinga su visomis loginių kintamųjų reikšmėmis.

Pavyzdžiui, tik ką įrodytą (1) formulę galima suformuluoti kitaip:

Ekvivalencija

$$(\bar{A}\vee B)\leftrightarrow(A\to B) \qquad (2)$$

yra teisinga, kad ir kokios būtų prielaidos dėl A ir B teisingumo.

Loginiai reiškiniai, kurie yra teisingi su bet kuriomis įeinančių į juos kintamųjų teisingumo reikšmėmis, vadinami *tautologijomis* (graikiškai *tauto* — tas pats ir *logos* — žodis).

Panašiai kaip raidžių algebra pagrįsta keliomis pagrindinėmis lygybėmis ($a+b=b+a$, $a+(b+c)=(a+b)+c$, $ab=ba$ ir t. t.), išreiškiančiomis pagrindines aritmetinių operacijų savybes, logikos algebra pagrįsta keliais ekvivalentumais. Dauguma jų yra savaime aiškūs, be to, kiekvieną tokį ekvivalentumą nesunku patikrinti, sudarius teisingumo lenteles. Išvardysime šiuos pagrindinius ekvivalentumus. Pradėsime nuo ekvivalentumų, turinčių tik vieną konjunkcijos arba disjunkcijos operaciją:

$$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A; \quad (3)$$

$$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A; \quad (4)$$

$$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C); \quad (5)$$

$$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C). \quad (6)$$

Šie ekvivalentumai rodo, kad konjunkcijos ir disjunkcijos operacijų savybės primena skaičių sudėties ir daugybos operacijų savybes. Šios operacijos skaičių aibėje yra susietos viena su kita priklausomybe $a(b+c)=ab+ac$, kuri išreiškia daugybos distributyvumą sudėties atžvilgiu. Tuo tarpu priklausomybė $a+bc=(a+b)(a+c)$ skaičių aibėje, apskritai tariant, neteisinga, t. y. sudėtis nėra distributyvi daugybos atžvilgiu. O teiginiams teisingi abu ekvivalentumai:

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C), \quad (7)$$

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C), \quad (8)$$

t. y. disjunkcija yra distributyvi konjunkcijos atžvilgiu, o konjunkcija — disjunkcijos atžvilgiu. Atliekant veiksmus su skaičiais, ypatingą reikšmę turi 0 ir 1: koks bebūtų skaičius a, teisingos lygybės $a+0=a$, $0 \cdot a=0$ ir $a \cdot 1=a$. Panašią funkciją logikos algebroje atlieka teiginiai T ir K; čia raide T pažymėtas neabejotinai teisingas teiginys, o raide K — neabejotinai klaidingas teiginys. Nesunku patikrinti, kad ir koks būtų teiginys A, teisingos priklausomybės:

$$T \wedge A \Leftrightarrow A, \; T \vee A \Leftrightarrow T, \; K \wedge A \Leftrightarrow K, \; K \vee A \Leftrightarrow A. \quad (9)$$

Be to, kad ir koks būtų teiginys A, visada

$$A \wedge A \Leftrightarrow A \vee A \Leftrightarrow A. \quad (10)$$

Dabar išvesime ekvivalentumus, turinčius teiginio neigimo operaciją. Teiginio $\bar{A}$ neiginys (žymimas $\bar{\bar{A}}$) yra pradinis teiginys A, t. y.

$$\bar{\bar{A}} \Leftrightarrow A. \quad (11)$$

Šį (11) ekvivalentumą lengva patikrinti, sudarius teisingumo lentelę. Iš (11) priklausomybės išplaukia, kad $\bar{\bar{\bar{A}}} \Leftrightarrow \bar{A}$ ir t. t. Naudodamiesi šiomis priklausomybėmis, galėsime prastinti reiškinius, kuriuose yra neigimo ženklas.

Remiantis teisingumo lentele, įrodoma, kad

$$\overline{A\wedge B}\Leftrightarrow\bar{A}\vee\bar{B}. \qquad (12)$$

Analogiškai įrodoma, kad

$$\overline{A\vee B}\Leftrightarrow\bar{A}\wedge\bar{B}. \qquad (13)$$

Nesunku įrodyti, kad

$$A\wedge\bar{A}\Leftrightarrow K. \qquad (14)$$

Šis ekvivalentumas reiškia, kad kartu negali būti teisingi teiginys A ir jo neiginys $\bar{A}$. Pavyzdžiui, neabejotinai yra klaidingas teiginys: „Linas Šukys mokosi mūsų mokykloje, ir jis nesimoko mūsų mokykloje".

Pritaikę (14) ekvivalentumui (12) taisyklę ir atsižvelgę, kad $\bar{K}\Leftrightarrow T$ (neabejotinai klaidingo teiginio neiginys yra neabejotinai teisingas), gauname $\overline{A\wedge\bar{A}}\Leftrightarrow T$, t. y. $\bar{A}\vee\bar{\bar{A}}\Leftrightarrow T$. Kitais žodžiais tariant,

$$A\vee\bar{A}\Leftrightarrow T. \qquad (15)$$

Šis ekvivalentumas reiškia, kad visuomet yra teisingas arba teiginys, arba jo neiginys. Pavyzdžiui, žmogus, pasakęs „Linas Šukys mokosi mūsų mokykloje arba jis nesimoko mūsų mokykloje", bus teisus bet kuriuo atveju.

Dabar išnagrinėkime ekvivalentumus, turinčius implikacijos ir ekvivalencijos operacijas. Jau įrodėme, kad

$$A\to B\Leftrightarrow\bar{A}\vee B. \qquad (1)$$

Kitaip tariant, pasakyti „Jei A, tai B" — tas pats, kaip pasakyti „Ne A arba B". Pritaikę šiai lygybei (13) taisyklę, gauname, kad

$$\overline{A\to B}\Leftrightarrow\overline{\bar{A}\vee B}\Leftrightarrow\bar{\bar{A}}\wedge\bar{B}\Leftrightarrow A\wedge\bar{B}.$$

Taigi

$$\overline{A\to B}\Leftrightarrow A\wedge\bar{B}. \qquad (16)$$

Ši lygybė rodo, kad implikaciją galima paneigti tik vieninteliu būdu — įrodžius, kad jos išvada yra klaidinga, nors sąlyga ir buvo teisinga (beje, ir be šito žinome, kad tik tokiu atveju implikacija yra klaidinga).

Iš tam tikros implikacijos teisingumo anaiptol neišplaukia, kad implikacija, gauta, sukeitus sąlygą su išvada, irgi bus teisinga. Pavyzdžiui, implikacija „jei skaičius 12 dalijasi iš 5, tai jis dalijasi iš 3" yra teisinga, nes čia yra klaidinga sąlyga „12 dalijasi iš 5". O štai sukeitę sąlygą ir išvadą vietomis, gausime klaidingą implikaciją. „Jei skaičius 12 dalijasi iš 3, tai jis dalijasi iš 5" — šį kartą sąlyga yra teisinga, o išvada yra klaidinga.

Implikacija $B\to A$, gauta iš $A\to B$, sukeitus sąlygą su išvada, vadinama atvirkštine implikacijai $A\to B$. Kitokią implikaciją iš $A\to B$ gautume, jei ir sąlygą, ir išvadą pakeistume jų nei-

giniais. Ji vadinama *priešingąja* duotajai implikacijai. Pavyzdžiui, implikacijai „Jei skaičiaus 12 paskutinysis skaitmuo yra lygus 5, tai šis skaičius dalijasi iš 3“ priešinga implikacija yra tokia: „Jei skaičiaus 12 paskutinysis skaitmuo nelygus 5, šis skaičius nesidalija iš 3“. Ji irgi yra klaidinga: juk skaičiaus 12 paskutinis skaitmuo nelygus 5, o šis skaičius dalijasi iš 3. O jei tuo pat metu sąlygą ir išvadą pakeistume jų neiginiais ir sukeistume vaidmenimis, gautume teisingą teiginį „Jei skaičius 12 nesidalija iš 3, tai jo paskutinis skaitmuo nelygus 5“ (šis teiginys yra teisingas trivialiu būdu, nes sąlyga „Skaičius 12 nesidalija iš 3“ yra klaidinga).

Apskritai, implikacijos $A \rightarrow B$ ir $\bar{B} \rightarrow A$ yra arba teisingos kartu, arba kartu klaidingos. Taigi teisingas ekvivalentumas

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \bar{B} \rightarrow \bar{A}. \tag{17}$$

Šio ekvivalentumo prasmė tokia: įrodžius teiginį „Iš A išplaukia B“, galima teigti, kad iš neiginio $\bar{B}$ išplaukia neiginys $\bar{A}$.

Remdamiesi teisingumo lentele, lengvai įsitikintume, kad

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})). \tag{18}$$

Vadinasi, ekvivalencija $A \leftrightarrow B$ yra teisinga tada ir tik tada, kai A ir B yra arba teisingi, arba A ir B yra klaidingi (tai derinasi su ekvivalencijos $A \leftrightarrow B$ teisingumo lentele). Toliau,

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)). \tag{18'}$$

Pritaikę konjunkcijos ir disjunkcijos neigimo taisyklę, gauname:

$$\overline{(A \Leftrightarrow B)} \Leftrightarrow \overline{(\bar{A} \vee B) \wedge (A \vee \bar{B})} \Leftrightarrow \overline{\bar{A} \vee B} \vee \overline{A \vee \bar{B}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\bar{\bar{A}} \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \triangle \bar{\bar{B}}) \Leftrightarrow (A \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \wedge B). \tag{18''}$$

Vadinasi, ekvivalencija $A \leftrightarrow B$ yra klaidinga tada ir tik tada, kai arba A yra teisingas, o B klaidingas, arba A yra klaidingas, o B teisingas.

Remiantis (1) ir (18) ekvivalentumais, bet kokiame loginiame reiškinyje galima implikacijos ir ekvivalencijos operacijas pakeisti disjunkcijos, konjunkcijos ir neigimo operacijomis. Galima dar sumažinti reikalingų loginių operacijų skaičių — juk disjunkciją galima pakeisti neigimo ir konjunkcijos operacijomis: $A \vee B \Leftrightarrow \overline{\bar{A} \wedge \bar{B}}$. Taigi lieka tik dvi operacijos — neigimas ir konjunkcija.

Remiantis teisingumo lentelėmis, nesunku įrodyti, kad

$$K \rightarrow A \Leftrightarrow T, \quad A \rightarrow T \Leftrightarrow T. \tag{19}$$

Šie ekvivalentumai reiškia, kad bet koks teiginys išplaukia iš neabejotinai klaidingo teiginio, o neabejotinai teisingas teiginys išplaukia iš bet kokio teiginio.

Taikydami ekvivalentumus, kuriuos įrodėme, galėsime pertvarkyti loginius reiškinius, sudarytus iš loginių kintamųjų, panašiai, kaip, taikydami įprastos algebros tapatybes, pertvarkome raidinius reiškinius.

1 pavyzdys. Suprastinkime reiškinį $\overline{\overline{A\wedge B}\vee(B\wedge C)}$. Pritaikę disjunkcijos ir konjunkcijos neigimo taisykles bei (11) priklausomybę, gauname:

$$\overline{(\overline{A\wedge B})\vee(B\wedge C)}\Leftrightarrow\overline{\overline{A\wedge B}}\wedge(\overline{B\wedge C})\Leftrightarrow(A\wedge B)\wedge(\bar{B}\vee\bar{C}).$$

O dabar pritaikysime (5) ir (7) priklausomybes:

$$(A\wedge B)\wedge(\bar{B}\vee\bar{C})\Leftrightarrow((A\wedge B)\wedge\bar{B})\vee((A\wedge B)\wedge\bar{C})\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(A\wedge(B\wedge\bar{B}))\vee((A\wedge B)\triangle\bar{C}).$$

Kadangi $B\wedge\bar{B}\Leftrightarrow K$, o $A\wedge K\Leftrightarrow K$, tai

$$(A\wedge B)\wedge(\bar{B}\vee\bar{C})\Leftrightarrow K\vee((A\wedge B)\wedge\bar{C}).$$

Pagaliau, remiantis (9) priklausomybe, pastarasis reiškinys yra ekvivalentus $A\wedge B\wedge\bar{C}$, t. y. jis teisingas tik vieninteliu atveju, kai A ir B yra teisingi, o C klaidingas (galutiniame reiškinyje praleidome skliaustus — jie nebūtini, nes konjunkcija turi asociatyvumo savybę). Tokį pat atsakymą gautume, jei logiškai išanalizuotume reiškinį (jis teisingas tik tada, kai reiškinys $A\wedge B\vee$ $\vee(\overline{B\wedge C})$ yra klaidingas, o taip bus tik tuomet, kai teiginys $A\wedge B$ bus teisingas, o $B\wedge C$ — klaidingas, ir t. t.).

2 pavyzdys. Jungtį „arba“, vartojamą skiriamąja prasme („arba A, arba B“), išreikškite konjunkcijos, disjunkcijos ir neigimo operacijomis.

Šia prasme vartojamos jungties „arba“ teisingumo lentelė yra tokia:

A	B	arba A, arba B
T	T	K
T	K	T
K	T	T
K	K	K

Tokią pat teisingumo lentelę turi reiškinys $(A\wedge\bar{B})\vee(\bar{A}\wedge B)$ (imame eilutes, kurių paskutiniame stulpelyje parašyta raidė „T“, iš kintamųjų A, $\bar{A}$, B, $\bar{B}$ sudarome tą konjunkciją, kuri yra teisinga su duotosiomis A ir B teisingumo reikšmėmis, ir imame gautųjų reiškinių disjunkciją).

Pratimai

32. Iš paprastųjų teiginių
A: „Rytoj lis“;
B: „Mes eisime į teatrą“;
C: „Rytoj bus saulėta“;
D: „Rytoj užsiėmimai prasidės anksčiau negu įprasta“ sudaryti šie sudėtiniai teiginiai:

a) jei rytoj lis, užsiėmimai prasidės anksčiau negu įprasta, ir mes eisime į teatrą;

b) rytoj bus saulėta arba lis, ir užsiėmimai prasidės anksčiau negu įprasta;

c) rytoj užsiėmimai prasidės anksčiau negu įprasta, ir mes eisime į teatrą tada ir tik tada, jei nelis ir bus saulėta.

Šiuos sudėtinius teiginius parašykite logikos algebros simboliais.

33. Kiekvieną paprastąjį teiginį, iš kurių sudaryti šie sudėtiniai teiginiai, pažymėkite raide ir šiuos sudėtinius teiginius parašykite simboliškai:

a) jei tiesė AB yra statmena tiesėms CD ir KL, tai tiesės CD ir KL yra lygiagrečios;

b) keturkampis yra lygiagretainis tada ir tik tada, kai jo priešingos kraštinės yra poromis lygiagrečios, arba tada, kai jo įstrižainės yra kongruenčios;

c) aš pasimankštinsiu ir, jei bus geras oras, važiuosiu į užmiestį;

d) keturkampis yra kvadratas tada ir tik tada, kai jo kraštinės ir visi kampai yra kongruentūs;

e) dvi plokštumos yra lygiagrečios tada ir tik tada, kai jos neturi bendrų taškų arba sutampa;

f) jei $c>a$, $c>b$ ir $c^2 \neq a^2+b^2$, tai netiesa, kad trikampis, kurio kraštinės a, b, c, yra statusis;

g) $x^2-5x+6=0$; iš čia $x=2$, $x=3$;

h) $|x|<2$, iš čia $x>-2$, $x<2$;

i) $|x|>2$, iš čia $x>2$, $x<-2$.

(Trijuose paskutiniuose sakiniuose reikia išaiškinti turimas galvoje logines jungtis.)

34. Kiekvienam reiškiniui sugalvokite po du atitinkamos loginės struktūros sakinius:

$$A \to \bar{B};\ \overline{A \wedge B} \leftrightarrow (\bar{A} \vee \bar{B});\ \overline{A \vee B} \leftrightarrow (\bar{A} \wedge \bar{B});\ A \to (B \wedge \bar{C});$$
$$(\bar{A} \to B) \vee C.$$

35. Įrodykite, kad šie reiškiniai yra tautologijos:

a) $(\bar{A} \to A) \to A$;

b) $(\bar{A} \to K) \to A$;

c) $(T \to A) \to A$;

d) $((A\to B)\land\bar B)\to\bar A$;
e) $(A\land(A\to B))\to B$;
f) $((A\to B)\land(B\to C))\to(A\to C)$;
g) $\bar A\to(A\to B)$;
h) $((A\land B)\to C)\leftrightarrow(A\to(B\to C))$;
i) $((A\lor B)\land\bar A)\to B$;
j) $A\lor(\bar A\land B)\lor(\bar A\lor\bar B)$.

36. Sudarykite šių reiškinių teisingumo lenteles:

a) $(\bar A\to B)\lor(A\land B)$; b) $\overline{A\lor B}\to(A\leftrightarrow\bar C)$;
c) $((A\to B)\to C)\land(D\to A)$; d) $(A\land B)\to(B\lor A)$;
e) $((A\to B)\land(B\to C))\to(A\to C)$.

Nustatykite, kurie jų yra tautologijos.

37. Kiekvienai 35 pratimo tautologijai sugalvokite po du ją atitinkančius teiginius.

38. Analogiškai visada teisingo teiginio (tautologijos) apibrėžimui suformuluokite visada klaidingo teiginio apibrėžimą.

39. Nustatykite, ar šie sakiniai yra vienas kito neiginiai:

a) teiginys A yra teisingas, teiginys A yra klaidingas;
b) reiškinys X visada yra teisingas, reiškinys X visada klaidingas;

40. Įrodykite šiuos ekvivalentumus:

a) $(A\land B)\lor A\Leftrightarrow A$;
b) $(A\lor B)\land A\Leftrightarrow A$;
c) $(A\lor B)\land\bar A\Leftrightarrow\bar A\land B$;
d) $(A\land B)\lor\bar A\Leftrightarrow B\lor\bar A$;
e) $(A\land B)\lor(A\land\bar B)\Leftrightarrow A$;
f) $(A\lor B)\land(A\lor\bar B)\Leftrightarrow A$.

41. Suprastinkite reiškinius:

a) $(A\land B\land C)\lor(A\land\bar B\land\bar D)\lor(A\land B\land\bar C)\lor\overline{(A\land D)\to B}$;
b) $(A\land B)\lor\overline{\bar A\to B}$;
c) $(A\land B\land C\land\bar A)\lor(D\land B\land\bar D)\lor(B\land C)$.

42. Pagal instrukciją kapitonas visą laiką turi būti laive, išskyrus tuos atvejus, kai laivas iškraunamas; jei laivas neiškraunamas, vairininkas niekada neišlips iš laivo, kol neišlipo kapitonas. Kuriais atvejais vairininkas privalo būti laive?

43. Du draugai vaikštinėja apskritimo formos keliu. Netoli nuo šio apskritimo centro įkastos keturios vienodo aukščio kartys su vienodo didumo, bet skirtingų spalvų vėliavėlėmis. Apskritimo spindulys gana didelis. Draugai, apėję visą apskritimo perimetrą, reziumavo savo stebėjimus: „Kai matyti raudona vėliavėlė, tai arba tuo pačiu metu matomos geltona ir žalia (ir galbūt mėlyna), arba nematoma žalia, bet matyti mėlyna (ir galbūt geltona) vėliavėlė. Kai nematyti raudonos vėliavėlės, tai nematoma ir geltona, bet tuomet kartu matyti žalia ir mėlyna". Įrodykite, kad kartys, prie kurių prikabintos raudona, geltona ir žalia vė-

liavėlės, yra vienoje tiesėje, be to, geltona vėliavėlė yra tarp raudonos ir žalios, o kartis su mėlyna vėliavėle nepriklauso šiai tiesei.

44. Signalinis įrenginys turi tris lemputes: raudoną, žalią ir geltoną. Po ilgo stebėjimo buvo išaiškinti tokie deriniai:

a) dega visos trys lemputės;

b) dega raudona ir geltona;

c) dega žalia ir geltona;

d) dega tik žalia;

e) dega tik geltona.

Ką galima pasakyti apie elektrinės grandinės, valdančios šias tris lemputes, vidines savybes, nežiūrint į įrenginio vidų.

45. Kiekvienoje šių implikacijų išskirkite sąlygą ir išvadą. Suformuluokite implikaciją, priešingą duotajai ir atvirkštinę priešingajai. Nustatykite, kokios jos — teisingos ar klaidingos:

a) jei jūs esate Afrikoje, tai esate įpiečiau Maskvos;

b) jei aš mokausi mokykloje, man daugiau kaip dveji metai;

c) jei paskutinis skaičiaus 17 skaitmuo lygus 5, jis dalijasi iš 5;

d) jei skaičiaus 25 skaitmenų suma dalijasi iš 3, šis skaičius dalijasi iš 3;

e) jei skaičiaus 23 skaitmenų suma dalijasi iš 5, šis skaičius dalijasi iš 5.

46. Sudarykite reiškinius, atitinkančius teisingumo lentelės duomenis, ir suprastinkite juos:

A	*B*	*C*	*X*	*Y*
T	*T*	*T*	*T*	*K*
T	*T*	*K*	*K*	*K*
T	*K*	*T*	*T*	*T*
T	*K*	*K*	*K*	*T*
K	*T*	*T*	*T*	*T*
K	*T*	*K*	*T*	*K*
K	*K*	*T*	*K*	*K*
K	*K*	*K*	*T*	*T*

47. Logikas pateko į piratų nelaisvę ir buvo uždarytas oloje, turinčioje du išėjimus. Piratų vadas pasiūlė tokį šansą išsigelbėti: „Vienas išėjimas veda į laisvę, antrasis — į mirtį. Tu gali pasirinkti bet kurį. Pasirinkti tau padės du mano piratai, kurių vienam tu gali pateikti vienintelį klausimą. Bet perspėju, kad vienas šių piratų visada sako tiesą, o antrasis visada meluoja". Neilgai galvojęs, logikas paklausė ir išgirdo atsakymą, kuris jam padėjo pasirinkti išėjimą, neabejotinai vedantį į laisvę. Koks buvo šis klausimas?

8*. Loginė išvada. Loginių reiškinių ekvivalentumas logikos algebroje turi tokią pačią reikšmę, kokią įprastoje algebroje turi

raidinių reiškinių tapatybės. Bet įprastoje algebroje greta tapačiųjų lygybių yra ir tapačiųjų nelygybių (pavyzdžiui, kokie bebūtų realieji skaičiai a ir b, visada $a^2+b^2 \geqslant 2ab$). Panašus logikos algebroje ir *loginės išvados sąryšio* vaidmuo. Žinome, kad tuo atveju, kai teiginys A yra teisingas, tai nepriklausomai nuo teiginio B teisingumo arba klaidingumo, disjunkcija $A \vee B$ yra teisinga. Tokiu atveju sakoma, kad $A \vee B$ logiškai išplaukia iš A. O kai konjunkcija $A \wedge B$ yra teisinga, teisingas ir teiginys A. Sakoma, kad A logiškai išplaukia iš $A \wedge B$.

Bendru atveju loginės išvados sąryšis apibrėžiamas taip: **loginis reiškinys Y išplaukia iš loginio reiškinio X, jei Y teisingas visada, kai X teisingas.** Loginės išvados sąryšis žymimas taip: $X \Rightarrow Y$ (iš X logiškai išplaukia Y).

Lygiai taip pat, kaip skiriami ekvivalencija ir ekvivalentumas, negalima painioti implikacijos su logine išvada. Implikacija — loginė operacija, kuria iš dviejų teiginių A ir B sukonstruojamas trečiasis teiginys $A \rightarrow B$. O loginė išvada — sąryšis tarp dviejų loginių reiškinių. Ryšį tarp implikacijos ir loginės išvados apibūdina šis tvirtinimas:

Loginis reiškinys Y išplaukia iš loginio reiškinio X tada ir tik tada, kai implikacija $X \rightarrow Y$ yra teisinga su visomis kintamųjų reikšmėmis (t. y. yra tautologija). Nesunku įsitikinti, kad tuomet, kai $X \Rightarrow Y$ ir $Y \Rightarrow X$, tai $X \Leftrightarrow Y$ (kai Y logiškai išplaukia iš X, o X logiškai išplaukia iš Y, tai X ir Y yra logiškai ekvivalentūs).

Samprotavimai, kuriuos paprastai taikome, įrodydami teoremas, pagrįsti loginės išvados sąvoka — iš tam tikrų teiginių logiškai gaunami kiti teiginiai. Aišku, galime būti tikri, kad su visomis loginių kintamųjų reikšmėmis, su kuriomis yra teisingi pradiniai teiginiai (juos vadiname prielaidomis), bus teisingos ir gautos išvados. Suprantama, norėdami garantuoti išvadų teisingumą, turime būti įsitikinę prielaidų teisingumu. Čia verta pakartoti anglų gamtininko T. Hekslio žodžius apie matematiką:

„Matematika, panašiai kaip girnos, sumala tik tai, ką į jas įpilame. Kaip ir puikiausias pasaulio malūnas nesumals iš balandūnės kvietinių miltų, taip ir formulių puslapiai neduos teisingo rezultato, jei duomenys yra netikslūs“.

Lygiai taip pat logiškiausi samprotavimai, pagrįsti klaidingomis prielaidomis, negarantuoja, kad išvados teisingos.

Remdamiesi tautologijomis, paminėtomis 7 skyrelyje (žr. ir 35 pratimą), gauname tokias loginės išvados taisykles:

$$T \rightarrow X \Rightarrow X; \tag{20}$$
$$\overline{X} \rightarrow \overline{K} \Rightarrow X; \tag{21}$$
$$\overline{X} \rightarrow X \Rightarrow X; \tag{22}$$
$$X \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow Y; \tag{23}$$
$$(X \rightarrow Y) \wedge \overline{Y} \Rightarrow \overline{X}; \tag{24}$$
$$(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow Z) \Rightarrow X \rightarrow Z. \tag{25}$$

Iš (20) taisyklės išplaukia, kad, norint įrodyti teiginio X teisingumą, pakanka parodyti, kad implikacija $T \to X$ yra teisinga, t. y. pakanka jį gauti iš teisingo teiginio. (21) taisyklė reiškia, kad, norint gauti teiginį X, pakanka parodyti, kad iš šio teiginio neiginio išplaukia klaidingas teiginys. Šiuo principu pagrįstas žinomas įrodymo prieštaravimo metodu būdas. Kitą įrodymo šiuo metodu variantą išreiškia (22) taisyklė — pakanka iš teiginio X neiginio gauti patį šį teiginį. (23) taisyklė vadinama modus ponens arba prielaidos praleidimu. Ji reiškia, kad tuomet, kai teiginys X yra teisingas, taip pat yra teisingas tvirtinimas, kad iš X išplaukia Y, tai Y irgi yra teisingas.

Loginės išvados pagal (23) schemą pavyzdžiu gali būti toks samprotavimas: „Jei duotasis trikampis yra lygiašonis, tai jo aukštinė dalija kampą prie viršūnės pusiau. Bet šis trikampis yra lygiašonis, o todėl jo aukštinė dalija kampą prie viršūnės pusiau".

Atkreipiame dėmesį, kad $((X \to Y) \wedge Y) \to X$ nėra tautologija, o todėl iš $X \to Y$ ir Y teisingumo neišplaukia X teisingumas. Todėl iš $(X \to Y) \wedge Y$ logiškai neišplaukia X.

Logikoje ypatingai svarbi yra (25) samprotavimų schema: jei iš X išplaukia Y, o iš Y — Z, tai to logiška išvada, kad iš X išplaukia Z. Štai tokio samprotavimo pavyzdys:

„Jei skaičius 40 baigiasi skaitmeniu 0, jis dalijasi iš 10, o jei jis dalijasi iš 10, tai jis dalijasi iš 5. Vadinasi, jei skaičius 40 baigiasi skaitmeniu 0, tai jis dalijasi iš 5".

Pratimai

48. Nustatykite, kurie šių teiginių teisingi:

a) $X \wedge Y \Rightarrow X$; b) $X \Rightarrow X \wedge Y$; c) $X \vee Y \Rightarrow X$;

d) $X \Rightarrow X \vee Y$; e) $(X \to Y) \Rightarrow X \wedge Y$; f) $(X \to Y) \Rightarrow (Y \to X)$;

g) $(X \to Y) \Rightarrow (\overline{X} \to \overline{Y})$; h) $(X \to Y) \Rightarrow (\overline{Y} \to \overline{X})$;

i) $(X \to Y) \wedge \overline{X} \Rightarrow \overline{Y}$.

49. Parašykite formalizuota išraiška šiuos samprotavimus ir patikrinkite, ar teisinga jų forma:

a) jei keturkampis $ABCD$ — rombas, jo įstrižainės yra statmenos viena kitai. Keturkampis $ABCD$ — rombas. Vadinasi, jo įstrižainės yra viena kitai statmenos;

b) jei 10 dalijasi iš 3, tai 100 dalijasi iš 3. 10 dalijasi iš 3. Vadinasi, 100 dalijasi iš 3;

c) jei 10 dalijasi iš 2, tai 100 dalijasi iš 2. 100 dalijasi iš 2. Vadinasi, 10 dalijasi iš 2;

d) jei pirminių skaičių aibė yra baigtinė, tai egzistuoja didžiausias pirminis skaičius. Nėra didžiausio pirminio skaičiaus. Vadinasi, pirminių skaičių aibė yra begalinė.

50. Atsakykite į šiuos klausimus:

a) ką galima pasakyti apie dviejų samprotavimų teisingumą, kai jų formalizuota išraiška yra vienoda?

b) ar gali teisingos formos samprotavimas turėti klaidingą išvadą? Ar gali neteisingos formos samprotavimas turėti teisingą išvadą?

c) ką galima pasakyti apie teisingos formos samprotavimo išvadą, kai visos jo prielaidos yra teisingos?

d) ką galima pasakyti apie teisingos formos samprotavimo prielaidas, kai jo išvada yra klaidinga?

e) ką galima pasakyti apie samprotavimą, kurio visos prielaidos yra teisingos, o išvada klaidinga?

51. Ar galima iš prielaidų „Jei dalykas įdomus, tai jis naudingas" ir „Dalykas yra neįdomus" padaryti išvadą, kad dalykas yra nenaudingas. Kodėl?

52. Ar galima iš prielaidos „Jei mokinys daug mokosi, jis sėkmingai išlaiko egzaminus" padaryti išvadą, kad mokinys, neišlaikęs egzamino, mokėsi mažai? Ar visada tokia išvada yra teisinga? Kodėl?

53. Laikydami tvirtinimus „Krepšinį žaidžia tikri vyrai" ir „Krepšinio nežaidžia bailys" teisingo samprotavimo atitinkamai prielaida ir išvada, suformuluokite turimą galvoje antrąją prielaidą. Patikrinkite, ar gautas samprotavimas teisingas.

54. Patikrinkite šiuos samprotavimus:

a) jei rytoj eisiu į pirmąjį užsiėmimą, turėsiu anksti atsikelti, o jei vakare eisiu į šokius, vėlai atsigulsiu. Jei atsigulsiu vėlai, o atsikelsiu anksti, turėsiu pasitenkinti penkiomis miego valandomis. Man penkių miego valandų neužtenka. Vadinasi, turiu praleisti pirmąjį užsiėmimą arba neiti į šokius;

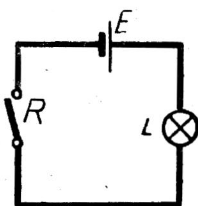
b) jei šiandien vakare bus šalta, eisiu į čiuožyklą. Jei rytoj bus atodrėkis, eisiu į muziejų. Šiandien vakare bus šalta arba rytoj bus atodrėkis. Vadinasi, eisiu į čiuožyklą ir į muziejų;

c) Nijolė ir Mindaugas yra vienmečiai arba Nijolė yra vyresnė už Mindaugą. Jei Nijolė ir Mindaugas — vienmečiai, tai Audra ir Mindaugas skirtingo amžiaus. Jei Nijolė vyresnė už Mindaugą, Mindaugas yra vyresnis už Povilą. Vadinasi, Audra ir Mindaugas yra skirtingo amžiaus arba Mindaugas yra vyresnis už Povilą.

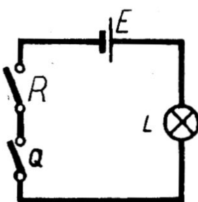
55. Uždavinys apie projektų tvirtinimo tvarką.

Trys cechai *A*, *B*, *C* sutarė dėl projektų tvirtinimo tvarkos: 1) kai cechas *B* nedalyvauja, tvirtinant projektą, nedalyvauja ir cechas *A*; 2) kai cechas *B* dalyvauja, tvirtinant projektą, tai dalyvauja cechas *A* ir cechas *C*. Ar turi cechas *C* dalyvauti, tvirtinant projektą, kai nedalyvauja cechas *A*?

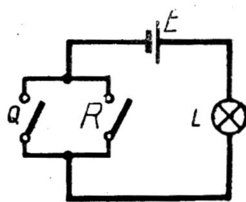
9*. Perjungimo schemos. Iš pirmo žvilgsnio atrodo, kad logikos algebrą praktiškai sunku pritaikyti. Bet tai netiesa. Daugelyje technikos problemų svarbią reikšmę turi relinės kontaktinės schemos. Šiuolaikiniuose šių schemų analizės ir konstravimo metoduose plačiai taikomos logikos algebros sąvokos ir formulės.



4 pav.



5 pav.



6 pav.

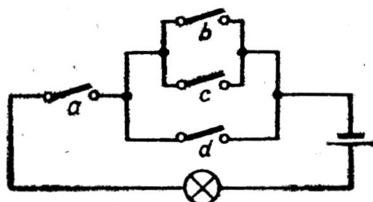
Išnagrinėkime kelis paprasčiausius pavyzdžius. Tarkime, kad grandinę sudaro srovės šaltinis E, laidais sujungtas su lempa L ir su raktu R (4 pav.). Raktą R galima įjungti arba išjungti ir tuomet grandinė bus sujungta arba nutraukta. Raktui R priskirkime kintamąjį X, o dviem jo padėtims „įjungtas", „išjungtas"— kintamojo X reikšmes „T" ir „K"; reikšmė „T" atitiks grandinės padėtį „sujungta", o „K"— grandinės padėtį „nutraukta".

Tarp srovės šaltinio ir lempos įmontuokime du nuosekliai sujungtus raktus R ir Q (5 pav.). Kai abu raktai įjungti, grandinė bus sujungta, kai bent vienas jų išjungtas — nutraukta. Kintamųjų X ir Y, priskirtų raktams R ir Q, konjunkcija yra teisinga (grandinė sujungta), kai abu kintamieji X ir Y teisingi (t. y. R ir Q įjungti), ir klaidinga (grandinė nutraukta), kai bent vienas kintamųjų klaidingas (bent vienas raktas išjungtas). Taigi reiškinys $X \wedge Y$ apibūdina, kaip veikia grandinė, pavaizduota 5 paveiksle.

Du raktai R ir Q lygiagrečiai sujungti su srovės šaltiniu E ir imtuvu L (6 pav.). Kai bent vienas raktas įjungtas, grandinė sujungta, kai jie abu išjungti, grandinė nutraukta. Tokios grandinės veikimą apibūdina kintamųjų, atitinkančių raktus R ir Q, disjunkcija $X \vee Y$. Reiškinys $X \vee Y$ yra teisingas (grandinė sujungta), kai teisingas bent vienas kintamųjų (bent vienas raktas įjungtas), ir klaidingas (grandinė nutraukta), kai abu kintamieji klaidingi (abu raktai išjungti).

Ištirtos atitiktys leidžia apibūdinti bet kokią grandinę, sudarytą iš nuosekliai arba lygiagrečiai sujungtų loginių reiškinių. Antra vertus, bet kokį loginį reiškinį galima sumodeliuoti atitinkama grandine.

Pratimai



7 pav.

56. Nubraižykite schemą grandinės, atitinkančios reiškinį

a) $(X \vee Y) \wedge (Z \vee X) \wedge Z$;

b) $(X \vee (X \wedge Y) \wedge (Y \rightarrow Z)$.

57. Sudarykite reiškinį, atitinkantį schemą, pavaizduotą 7 pa-

veiksle, ir suprastinkite jį; suformuluokite sąlygas, kada grandinė yra sujungta. Nubraižykite schemą, atitinkančią suprastintą reiškinį.

58. Nubraižykite schemą paprasčiausios grandinės, kurios darbo sąlygos yra apibrėžtos šia teisingumo lentele.

X	*Y*	*Z*	*F*
T	*T*	*T*	*T*
T	*T*	*K*	*T*
T	*K*	*T*	*K*
T	*K*	*K*	*T*
K	*T*	*T*	*K*
K	*T*	*K*	*K*
K	*K*	*T*	*T*
K	*K*	*K*	*K*

Nurodymas. Sudarykite reiškinį, atitinkantį šią lentelę; ką tik galima — suprastinkite.

59. Komitetas, sudarytas iš trijų narių, balsų dauguma slaptu balsavimu priima nutarimą. Sudarykite tokią schemą, kad kiekvieno nario balsavimą „už" atitiktų mygtuko nuspaudimas (rakto įjungimas) ir kad signalinė lemputė užsidegtų, tik priėmus nutarimą (ir tik šiuo atveju).

TEIGINIO FORMOS IR OPERACIJOS SU JOMIS

1. Teiginio formos. Iki šiol nagrinėjome elementarius teiginius kaip vieningą visumą ir tik domėjomės, klaidingi jie ar teisingi. Šiuo požiūriu teiginiai „Visi žmonės turi širdį" ir „Kai kurie žmonės yra mėlynakiai" nesiskiria, nes jie abu yra teisingi. Bet jie skiriasi savo forma: pirmajame tvirtinama, kad tam tikros savybės būdingos visiems žmonėms, o antrajame kalbama apie savybę, kurią turi tik kai kurie žmonės. Šių teiginių analizė rodo, kad jie sudaryti iš trijų dalių. Viena jų — veiksnys „žmonės". Jis apibūdina tą objektų aibę, apie kurios savybes kalbama teiginyje. Antroji dalis — tarinys „turi širdį" arba „yra mėlynakiai". Lotyniškai tarinys vadinamas *predikatu*. Be to, šiuose teiginiuose yra žodžiai „visi" arba „kai kurie", apibūdinantys kiekį elementų, turinčių duotąją savybę. Lotyniškai žodis „kiek" yra „quantum", todėl šie žodžiai vadinami *kvantoriais*.

Taigi teiginiai, apibūdinantys tam tikros aibės savybes, susideda iš trijų dalių: šios aibės pavadinimo, savybių (predikato) išvardijimo ir kvantoriaus, rodančio, ar šią savybę turi visi aibės elementai, ar tik kai kurie jų. Šiuos teiginius galima parašyti taip: „Visi x iš aibės X (arba kai kurie x iš aibės X) pasižymi predikatu P". Iš šio teiginio galima išskirti dalį „x turi savy-

bę P, be to, priklauso aibei X". Ši dalis vadinama *teiginio forma* ir žymima $P(x)$, $x \in X$. Teiginio forma nėra teiginys: kadangi nežinome, koks aibės X elementas x yra parinktas, negalime pasakyti, teisingas ar klaidingas tvirtinimas, kad x turi savybę P. Tik vietoj x paėmę tam tikrą apibrėžtą aibės X elementą a, gausime teiginį, kuris žymimas $P(a)$.

Pateikiame teiginio formų pavyzdžių:

a) žmogus x rudaplaukis;
b) mūsų klasės mokinys x rudaplaukis;
c) skaičius x didesnis už septynis;
d) natūrinis skaičius x didesnis už septynis;
e) upė x įteka į Baltijos jūrą;
f) europine TSRS dalimi tekanti upė x įteka į Baltijos jūrą.

Šiuose sakiniuose jau pasakyta, kokiai aibei priklauso x (pirmajame sakinyje — visai žmonių aibei, antrajame sakinyje — mūsų klasės mokinių aibei ir t. t.). Kai ši aibė sakinyje neišsiskiria, ją reikia nurodyti atskirai; pavyzdžiui, parašyti, kad $x>7$, kai $x \in N$.

Iš šių teiginio formų, suteikdami kintamajam x vienokias ar kitokias reikšmes, galime gauti įvairių teiginių. Pavyzdžiui, pakeitę e) sakinyje raidę x žodžiu „Dauguva", gauname teisingą teiginį „Upė Dauguva įteka į Baltijos jūrą". O pakeitę tame pačiame sakinyje raidę x žodžiu „Dunojus", gauname klaidingą teiginį „Upė Dunojus įteka į Baltijos jūrą". Kartais aibėje X būna elementų, kuriuos įrašę gauname beprasmį sakinį. Pavyzdžiui, Palanga — ne upė, o miestas. Todėl, jei e) pavyzdyje aibė X būtų sudaryta ne tik iš upių, bet ir iš miestų, gautume beprasmį tvirtinimą „Upė Palanga įteka į Baltijos jūrą". Ateityje, nenorėdami komplikuoti padėties, beprasmius sakinius laikysime klaidingais teiginiais. Dažnai vietoj posakio „teiginys $P(a)$ yra teisingas (klaidingas)" vartojamas posakis „teiginio forma $P(x)$ yra teisinga (klaidinga), kai $x=a$".

Kintamojo x reikšmių, su kuriomis teiginio forma $P(x)$ yra teisinga, visumą T vadiname šios formos teisingumo aibe. Pavyzdžiui, teiginio formos „Romaną x parašė Baltušis" aibei T priklauso „Parduotos vasaros", „Sakmė apie Juzą", bet nepriklauso „Puodžiūnkiemis".

Lygtys bei nelygybės, kuriose yra kintamasis, taip pat yra teiginio formos. Pavyzdžiui, $2x-4=3(x+5)$ — teiginio forma, apibrėžta realiųjų skaičių aibėje R. Kai $x=1$, ši forma yra klaidinga, nes, į lygtį vietoj x įrašę reikšmę 1, gauname klaidingą lygybę $2 \cdot 1-4=3(1+5)$, t. y. $-2=18$. O kai $x=-19$, ji yra teisinga, nes lygybė $2(-19)-4=3(-19+5)$ yra teisinga. Teiginio formos $x^2-4=0$ teisingumo aibę sudaro skaičiai -2 ir 2, $T=\{-2, 2\}$. Mokykloje įprasta vadinti lygties šaknų aibe, bet tai yra tas pats, tik kitaip pavadinta. Nelygybė $2x-4>18$ yra teiginio forma. Nesunku patikrinti, kad šios formos teisingumo aibė yra skaičių spindulys $\{x|x>11\}$.

Pratimai

60. Iš šių sakinių išrinkite teiginio formas ir nustatykite jų apibrėžimo sritį bei teisingumo aibę, taip pat išrinkite teiginius ir raskite jų teisingumo reikšmes:

a) $x^2-2x-15=0$;
b) lygybė $x^2-2x-15=0$ yra teisinga, kai $x=5$;
c) kokie bebūtų skaičiai x, visada $x^2-2x-15=0$;
d) yra neigiamas skaičius, x, su kuriuo $x^2-2x-15=0$;
e) jei skaičius x dalijasi iš 3, tai jis dalijasi ir iš 9;
f) visi skaičiai, kurie dalijasi iš 9, dalijasi iš 3;
g) yra skaičių, kurie dalijasi iš 9, bet nesidalija iš 3;
h) netiesa, kad skaičius 17 dalijasi iš 5;
i) stačiakampio x įstrižainės yra kongruenčios;
j) bet kurio stačiakampio įstrižainės yra kongruenčios.

61. Duotos teiginio formos $A(x)$: „$9x^2-4=0$“ ir $B(x)$: „$3x-2<-11$“. Raskite jų teisingumo aibes, kai jos yra apibrėžtos aibėse: a) R; b) R_+; c) N.

62. Raskite teiginio formos „skaičius x yra lyginis“, apibrėžtos aibėje $X=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, teisingumo aibę.

63. Raskite šių teiginio formų teisingumo aibes:

a) $\sqrt{x+2}=1$;
b) $\sqrt{x+2}>1$;
c) $x^3-3x^2+3x-1\geqslant 0$;
d) $x^4-10x^2+9=0$;
e) $(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$;
f) $\sqrt{x^2}=x$;
g) $\sqrt{x^2}=|x|$;
h) $\sqrt{x^2}=-x$;
i) $\sqrt{x^2}=-|x|$;
j) $\sqrt{x^2}=-1$.

2. Operacijos su teiginio formomis. Tarkime, kad teiginio formos $P(x)$, $Q(x)$, ... yra apibrėžtos toje pačioje aibėje X. Panaudojus logines operacijas (neigimą, konjunkciją, disjunkciją ir t. t.), iš šių formų galima sudaryti įvairių reiškinių, pavyzdžiui:

$$P(x)\wedge Q(x),\ P(x)\rightarrow(Q(x)\vee R(x))$$

ir t. t. Kiekviename tokiame reiškinyje kintamąjį x pakeitę kuria nors jo reikšme a, gausime sudėtinį teiginį, sudarytą iš teiginių $P(a)$, $Q(a)$ ir t. t. Todėl tokie reiškiniai taip pat yra teiginio formos. Jos teisingos su tais $a\in X$, su kuriais teisingi atitinkami teiginiai. Pavyzdžiui, teiginio forma $(3<x)\wedge(x<6)$ yra teisinga, kai $x=4$, nes teiginiai $3<4$ ir $4<6$ yra teisingi, todėl ir jų konjunkcija bus teisinga. Užrašams sutrumpinti toliau fiksuosime aibę X ir vietoj $P(x)$, $x\in X$ rašysime $P(x)$ ir t. t.

Pateikiame keletą pavyzdžių operacijų su teiginio formomis.

1. Tarkime, $P(x)$ reiškia „Miestas x yra Maskvos srityje“. Tuomet $\overline{P}(x)$ skaitome taip: „Miesto x nėra Maskvos srityje“. Todėl Kijevas priklauso $\overline{P}(x)$ teisingumo aibei, bet nepriklauso $P(x)$ teisingumo aibei.

2. Kai $P(x)$ reiškia „Skaičius x dalijasi iš 3 be liekanos“, tai $\bar{P}(x)$ reiškia „Skaičius x nesidalija iš 3 be liekanos“.

3. Kai $P(x)$ reiškia „Žmogus x gyvena Maskvoje“, o $Q(x)$ — „Žmogus x yra rudakis“, tai $P(x) \wedge Q(x)$ reiškia, kad „Žmogus x gyvena Maskvoje ir yra rudakis“. Nei pilkakės maskvietės, nei rudakiai leningradiečiai (tuo labiau mėlynakės kijevietės) nepriklauso šios teiginio formos teisingumo aibei.

4. Kai $P(x)$ reiškia „Skaičius x dalijasi iš 3 be liekanos“, o $Q(x)$ — „Skaičius x dalijasi iš 2 be liekanos“, tai $P(x) \vee Q(x)$ reiškia „Skaičius x dalijasi be liekanos iš 2 arba iš 3“. Todėl, pavyzdžiui, skaičiai 4, 6, 9 priklauso $P(x) \vee Q(x)$ teisingumo aibei, o skaičius 5 šiai aibei nepriklauso.

5. Tarkime, kad $P(x)$ reiškia „Skaičius x dalijasi iš 3“, o $Q(x)$ —„Skaičius x dalijasi iš 5“. Tuomet $P(x) \rightarrow Q(x)$ reiškia „Kai skaičius x dalijasi iš 3, tai jis dalijasi iš 5“. Skaičiai 4 ir 10 priklauso šios teiginio formos teisingumo aibei, nes su jais $P(x)$ yra klaidingas: nei 4, nei 10 nesidalija iš 3. Be to, visai nesvarbu, kad 4 nesidalija iš 5, o 10 dalijasi iš 5. Teiginio formos $P(x) \rightarrow Q(x)$ teisingumo aibei priklauso ir skaičius 15, nes yra teisingi teiginiai ir $P(15)$, ir $Q(15)$. O skaičius 6 nepriklauso $P(x) \rightarrow Q(x)$ teisingumo aibei, nes $P(6)$ yra teisingas, o $Q(6)$ yra klaidingas. Kadangi nagrinėjamos implikacijos teisingumo aibė nesutampa su visų natūrinių skaičių aibe, tai teiginys „Bet koks natūrinis skaičius, kuris dalijasi iš 3, dalijasi ir iš 5“ yra klaidingas.

Pratimai

64. Duotos teiginio formos $P(x)$: „Žmogus x gyvena Maskvoje“ ir $Q(x)$: „Žmogus x dėsto mokykloje“. Perskaitykite žodžiais šias teiginio formas ir nustatykite kiekvienos jų teisingumo aibę:

a) $P(x) \wedge Q(x)$; b) $P(x) \vee Q(x)$; c) $\bar{P}(x) \wedge Q(x)$;
d) $P(x) \wedge \bar{Q}(x)$; e) $\bar{P}(x) \vee Q(x)$; f) $\bar{P}(x) \wedge \bar{Q}(x)$;
g) $P(x) \rightarrow Q(x)$; h) $Q(x) \rightarrow P(x)$.

65. Duotos teiginio formos $P(x)$: „Tiesė x liečia apskritimą“ ir $Q(x)$: „Tiesė x yra nutolusi nuo šio apskritimo centro atstumu, lygiu jo spinduliui“. Perskaitykite ekvivalenciją $P(x) \leftrightarrow Q(x)$. Ar su visais x ji teisinga?

66. Duotos teiginio formos $P(x)$: „Skaičius x dalijasi iš 3“ ir $Q(x)$: „Skaičiaus x skaitmenų suma dalijasi iš 9“. Ištirkite, kurios šių implikacijų yra teisingos visoje natūrinių skaičių aibėje:

a) $P(x) \rightarrow Q(x)$; b) $Q(x) \rightarrow P(x)$; c) $\bar{P}(x) \rightarrow Q(x)$; d) $Q(x) \rightarrow \rightarrow \bar{P}(x)$.

67. Raskite teisingumo aibes šių teiginio formų:

a) $(x^2-4=0)\vee(x^2-9)=0$; b) $(x^2-6x+8=0)\wedge(x^2-16=0)$;
c) $(x^2-6x+8=0)\leftrightarrow(x^2-16=0)$; d) $(x^2-4=0)\leftrightarrow(x^2=4)$;
e) $(x^2-4=0)\leftrightarrow(x=2)$; f) $(x^2-6x+8=0)\wedge(x^2=9\geqslant 0)$;
g) $\sqrt{x^2}\leqslant x$; h) $|9-x|+|x+1|=10$; i) $|x|=|x+1|$;
j) $|x-5|>|x+1|$.

3. Operacijų su teiginio formomis ir jų teisingumo aibių ryšys. Teiginio formų $P(x)\wedge Q(x)$, $P(x)\vee Q(x)$, $P(x)\to Q(x)$, $P(x)\leftrightarrow$ $\leftrightarrow Q(x)$, $\bar{P}(x)$ ir $\bar{Q}(x)$ teisingumo aibes rasti nesunku, kai yra žinomos formų $P(x)$ ir $Q(x)$, apibrėžtų aibėje X, teisingumo aibės. Forma $\bar{P}(x)$ yra teisinga su tomis ir tik su tomis x reikšmėmis, su kuriomis $P(x)$ yra klaidinga. Todėl $\bar{P}(x)$ teisingumo aibė — tai $P(x)$ teisingumo aibės papildinys aibėje X. Tai galima užrašyti tokia formule:

$$T_{\bar{P}}=(T_P)'. \tag{1}$$

Teiginio forma $P(x)\wedge Q(x)$ yra teisinga su tomis x reikšmėmis, su kuriomis yra teisingos $P(x)$ ir $Q(x)$. Tai reiškia, kad $P(x)\wedge Q(x)$ teisingumo aibė yra $P(x)$ ir $Q(x)$ teisingumo aibių sankirta:

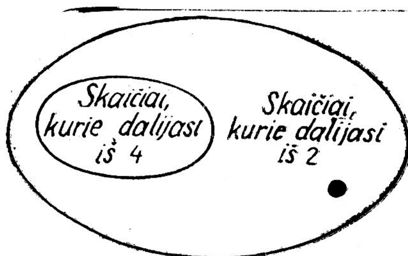
$$T_{P\wedge Q}=T_P\cap T_Q \tag{2}$$

(taigi neatsitiktinai teiginių konjunkcija ir aibių sankirta žymimos panašiais ženklais). Analogiškai įsitikiname, kad

$$T_{P\vee Q}=T_P\cup T_Q. \tag{3}$$

Kai teiginio formų $P(x)$ ir $Q(x)$ teisingumo aibės vienodos, t. y., kai $T_P=T_Q$, jos vadinamos ekvivalenčiomis; žymime $P(x)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow Q(x)$. Šį kartą ekvivalencija $P(a)\leftrightarrow Q(a)$ yra teisinga, kad ir koks būtų $a\in X$. Iš tikrųjų, kai $a\in T_P=T_Q$, teiginiai $P(a)$ ir $Q(a)$ yra teisingi, o tuomet teisingas ir ekvivalentumas $P(a)\Leftrightarrow Q(a)$; kai $a\notin T_P=T_Q$, tai $P(a)$ ir $Q(a)$ yra klaidingi, o tuomet $P(a)\leftrightarrow$ $\leftrightarrow Q(a)$ vis tiek yra teisinga. Teisingas ir atvirkščias teiginys: kai ekvivalencija $P(x)\leftrightarrow Q(x)$ yra teisinga su visais $x\in X$, tai teiginio formos $P(x)$ ir $Q(x)$ yra ekvivalenčios.

Teiginio formos $P(x)$: „Natūrinis skaičius x dalijasi iš 4“ ir $Q(x)$: „Natūrinis skaičius x dalijasi iš 2“ yra tokios, kad implikacija $P(a)\to Q(a)$ yra teisinga, kad ir koks būtų natūrinis a: kai a dalijasi iš 4, tai jis dalijasi ir iš 2, o kai a nesidalija iš 4, tai implikacija yra teisinga trivialiu būdu, mat sąlyga yra klaidinga. Sakoma, kad $Q(x)$ yra $P(x)$ išvada.



8 pav.

Skaičių, kurie dalijasi iš 4, aibė yra skaičių, kurie dalijasi iš 2, aibės poaibis. Kitaip tariant, šiame pavyzdyje $T_P \subset T_Q$. Tai neatsitiktinis reiškinys, nes visuomet, kai implikacija $P(a) \rightarrow Q(a)$ yra teisinga su visais a iš X, t. y. kai $Q(x)$ išplaukia iš $P(x)$, galioja sąlyga $T_P \subset T_Q$. Tuo lengvai įsitikiname, nubraižę Oilerio—Veno diagramą (8 pav.). Teisingas ir atvirkščias tvirtinimas: kai $T_P \subset T_Q$, tai $P(x) \rightarrow Q(x)$. Taigi $Q(x)$ išplaukia iš $P(x)$ tada ir tik tada, kai $T_P \subset T_Q$. Tokiu atveju sakoma, kad $P(x)$ — pakankama sąlyga teiginio formai $Q(x)$, o $Q(x)$ — būtina sąlyga teiginio formai $P(x)$ arba $Q(x)$ — $P(x)$ išvada, ir rašoma $P(x) \Rightarrow Q(x)$.

Pavyzdžiui, natūrinių skaičių, kurie dalijasi iš 9, aibė yra natūrinių skaičių, kurie dalijasi iš 3, aibės poaibis. Kitaip tariant, kai $P(x)$ reiškia „Natūrinis skaičius x dalijasi iš 9“, o $Q(x)$ — „natūrinis skaičius x dalijasi iš 3“, tai $T_P \subset T_Q$, todėl sąryšis $P(x) \Rightarrow Q(x)$ yra teisingas su visais $x \in N$. Vadinasi, kai natūrinis skaičius x dalijasi iš 9, tai to pakanka, kad jis dalytųsi iš 3, o dalumas iš 3 būtinas, kad skaičius dalytųsi iš 9.

Kai ir $P(x) \Rightarrow Q(x)$ ir $Q(x) \Rightarrow P(x)$, tai $T_P \subset T_Q$ ir $T_Q \subset T_P$. Tokiu atveju $T_P = T_Q$, t. y. $P(x)$ ir $Q(x)$ teisingumo aibė yra ta pati. Todėl $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$. Šią mintį galima išreikšti ir kitaip, pasakius, kad $P(x)$ — būtina ir pakankama sąlyga teiginio formai $Q(x)$, o $Q(x)$ — būtina ir pakankama sąlyga teiginio formai $P(x)$. Pavyzdžiui, kad natūrinis skaičius x dalytųsi iš 9, būtina ir pakanka, jog šio skaičiaus dešimtainio užrašo skaitmenų suma dalytųsi iš 9. Tai reiškia, kad natūrinių skaičių, kurie dalijasi iš 9, aibė sutampa su natūrinių skaičių, kurių dešimtainio užrašo skaitmenų suma dalijasi iš 9, aibe.

Pratimai

68. Tarkime, X — gyvų būtybių aibė. Nubraižykite Oilerio — Veno diagramas, kurios vaizduotų ryšius tarp šių teiginio formų:

a) $P(x)$: „x — yra šaltakraujis“, $Q(x)$: „x turi stuburą“;

b) $P(x)$: „x — žuvis“, $Q(x)$: „x turi širdį, sudarytą iš keturių skilvelių“;

c) $P(x)$: „x yra sparnuotis“, $Q(x)$: „x — žinduolis“;

d) $P(x)$: „x — žmogus“, $Q(x)$: „x — dvikojė būtybė be plunksnų“;

e) $P(x)$: „x turi žiaunas“, $Q(x)$: „x skraido 100 m aukštyje“.

69. Tarkime, Y — daugianarių aibė. Nubraižykite Oilerio — Veno diagramas, vaizduojančias ryšius tarp šių teiginio formų:

a) $P(y)$: „Daugianario y laipsnis lygus 5“. $Q(y)$: „Daugianaris y turi aštuonias skirtingas šaknis“;

b) $P(y)$: „Daugianario y koeficientų suma lygi nuliui“, $Q(y)$: „Skaičius 1 yra daugianario y šaknis“;

c) $P(y)$: „Vyriausias daugianario y koeficientas lygus 1, o visi kiti koeficientai yra sveikieji skaičiai“, $Q(y)$: „Skaičius $\frac{3}{4}$ yra daugianario y šaknis“.

70. Tarkime, X — trikampių aibė. Nubraižykite Oilerio—Veno diagramas, vaizduojančias ryšius tarp šių teiginio formų:

a) $P(x)$: „Trikampis x yra lygiašonis“, $Q(x)$: „Trikampis x yra lygiakraštis“;

b) $P(x)$: „Trikampis x yra lygiašonis“, $Q(x)$: „Kampai prie trikampio x pagrindo yra kongruentūs“;

c) $P(x)$: „Trikampis yra statusis“, $Q(x)$: „Į trikampį x galima įbrėžti apskritimą“.

Ištirkite, kurios šių implikacijų yra teisingos su visais $x \in X$ a) atveju, b) atveju, c) atveju.

$$P(x) \to Q(x),\ \bar{P}(x) \to Q(x),\ P(x) \to \bar{Q}(x),$$
$$\bar{P}(x) \to \bar{Q}(x),\ Q(x) \to P(x),\ \bar{Q}(x) \to P(x),$$
$$Q(x) \to \bar{P}(x),\ \bar{Q}(x) \to \bar{P}(x).$$

71. Tarkime, $P(x)$ yra teiginio forma „Natūrinis skaičius x dalijasi iš 5“, $Q(x)$ — „Paskutinis skaičiaus x dešimtainio užrašo skaitmuo lygus nuliui“. Kurios šių implikacijų yra teisingos su visais x ir N? Suformuluokite jas, vartodami žodžius „būtina“ ir „pakankama“. Suraskite teisingumo aibes tų implikacijų, kurios yra teisingos ne su visais natūriniais skaičiais:

a) $P(x) \to Q(x)$; b) $\bar{P}(x) \to Q(x)$;
c) $P(x) \to \bar{Q}(x)$; d) $\bar{P}(x) \to \bar{Q}(x)$;
e) $Q(x) \to P(x)$; f) $\bar{Q}(x) \to P(x)$;
g) $Q(x) \to \bar{P}(x)$; h) $\bar{Q}(x) \to \bar{P}(x)$.

72. Šiuose sakiniuose vietoj daugtaškio įrašykite žodžius „būtina, bet nepakankama“, „pakankama, bet nebūtina“, „būtina ir pakankama“ taip, kad gautos implikacijos būtų teisingos su visomis x reikšmėmis:

a) Kad skaičius x dalytųsi iš 5, ..., jog šio skaičiaus dešimtainis užrašas baigtųsi skaitmeniu 0.

b) Kad skaičius x dalytųsi iš 9, ..., jog šio skaičiaus dešimtainio užrašo skaitmenų suma dalytųsi iš 3.

c) Kad trikampis x būtų lygiašonis, ..., jog kampai prie pagrindo būtų kongruentūs.

d) Kad lygiagretainis x būtų rombas, ..., jog įstrižainės vidaus kampus dalytų pusiau.

e) Kad lygiagretainis x būtų kvadratas, ..., jog jo kraštinės būtų kongruenčios.

73. Ar išplaukia lygtis $(x-1)(x-2)(x+3)=0$ iš lygties $x^2=1$, kai kintamasis x įgyja reikšmes iš a) sveikųjų skaičių aibės; b) natūrinių skaičių aibės?

74. Kintamojo reikšmių aibę parinkite taip, kad šioje aibėje antroji teiginio forma išplauktų iš pirmosios:

a) x dalijasi iš 3; x yra lyginis.
b) $x^2+2x-15=0$; $x>0$.
c) y — sudurtinis žodis, sudarytas iš trijų žodžių; žodyje y raidė a parašyta ne daugiau kaip du kartus.

75. Išnagrinėkite, ar ekvivalenčios yra šios teiginio formos, kai kintamieji įgyja reikšmes iš 1) natūrinių skaičių aibės, 2) sveikųjų skaičių aibės, 3) racionaliųjų skaičių aibės, 4) realiųjų skaičių aibės:

a) $|x|\leqslant 0$, $x^2+y^2=0$;
b) $\frac{x^2-2}{x+\sqrt{2}}=x-\sqrt{2}$, $\sqrt{x^2}=|x|$;
c) $(x-\sqrt{2})\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)=0$, $x^2=1$;
d) $\sqrt{xy}=6$, $\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=6$;
e) $x=y$, $\sqrt{x}=\sqrt{y}$;
f) $x=y$, $|x|=|y|$.

76. Kintamojo reikšmių aibę parinkite taip, kad šioje aibėje duotosios teiginio formos būtų ekvivalenčios:

a) x yra lyginis, x yra kartotinis 3;
b) y — lyginis skaičius, y — pirminis skaičius;
c) $x^2=1$, $x=1$;
d) z — rombas, z įstrižainės yra statmenos.

77. Ištirkite, ar išplaukia bent viena teiginio forma iš kitos $(x\in R)$:
a) $|x|<3$, $x^2-3x+2=0$;
b) $x^4=16$, $x^2=4$;
c) $x^2+x-6=0$, $(x-1)(x-2)(x-3)=0$;
d) $x-1>0$, $(x-2)(x-5)=0$;
e) $x^2+5x=9$, $\sqrt{x^2}=-1$;
f) $x^2+5x=0$, $x+1=1+x$.

78. Raskite aibę tų a reikšmių, su kuriomis iš vieno sakinio išplaukia kitas:
a) $x>a$, $x>1$;
b) $|x|<a$, $x^2<9$;
c) $x^2+x-6=0$, $|x|<a$;
d) $|x|<a$, $x^2+5x+7=0$;
e) $x=a$, $x^2\geqslant 0$;
f) $|x|<a$, $x^2\geqslant 0$;
g) $x^2+5x-6<0$, $x-a>1$.

79. Išsiaiškinkite, ar šios teiginio formos yra ekvivalenčios, kai $x\in R$:
a) $x+1=0$, $x=\sqrt{0{,}875}$;
b) $|x|\geqslant 0$, $(x+1)^2=x^2+2x+1$;

c) $|x|>3,\ x^2-9>0$;

d) $|x|<0,\ x^2+4<3$;

e) $x=1,\ x+\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-4}=1$;

f) $x>0,\ x^2>0$;

g) $x=x,\ \frac{x^2}{x}=x$;

h) $x\left(\frac{1}{x^4+4}-1\right)=0,\ x=0$ arba $\frac{1}{x^4+4}=1$;

i) $\overline{x>2},\ x<2$;

j) $\overline{x>2},\ x\leqslant 2$.

80. Raskite aibę tų a reikšmių, su kuriomis šios teiginio formos yra ekvivalenčios:

a) $x^2+ax-1=0,\ x=1$;

b) $|x|<a,\ (x-3)^2=x^2-6x+9$;

c) $|x|<a,\ \sqrt{x^2}=-3$;

d) $x^2+a^2=0,\ \sqrt{x^2}=-|x|$.

81. Vietoj daugtaškių įrašykite jungtis „ir“ ar „arba“ taip, kad galiotų šie ekvivalentumai:

a) $|x|=1 \Leftrightarrow x=1\ \ldots\ x=-1$;

b) $|x|<1 \Leftrightarrow x>-1\ \ldots\ x<1$;

c) $|x|>1 \Leftrightarrow x<-1\ \ldots\ x>1$;

d) $ab=0 \Leftrightarrow a=0\ \ldots\ b=0$;

e) $ab\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 0\ \ldots\ b\neq 0$;

f) $\frac{a}{b}=0 \Leftrightarrow a=0\ \ldots\ b\neq 0$;

g) $a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=b\ \ldots\ b=0$;

h) $\frac{a}{b}>0 \Leftrightarrow a>0\ \ldots\ b>0)\ldots(a<0\ \ldots\ b<0)$.

82. Įrodykite ekvivalentumus:

a) $P(x)\wedge Q(x) \Leftrightarrow Q(x)\wedge P(x)$;

b) $P(x)\vee Q(x) \Leftrightarrow Q(x)\vee P(x)$;

c) $\overline{P(x)\wedge Q(x)} \Leftrightarrow \overline{P}(x)\vee \overline{Q}(x)$;

d) $\overline{P(x)\vee Q(x)} \Leftrightarrow \overline{P}(x)\wedge \overline{Q}(x)$;

e) $P(x)\rightarrow Q(x) \Leftrightarrow \overline{P}(x)\vee Q(x)$;

f) $\overline{P(x)\rightarrow Q(x)} \Leftrightarrow P(x)\wedge \overline{Q}(x)$;

g) $P(x)\leftrightarrow Q(x) \Leftrightarrow (P(x)\wedge Q(x))\vee(\overline{P}(x)\wedge \overline{Q}(x))$.

83. Pavaizduokite $P(x)$ ir $Q(x)$ teisingumo aibes, o paskui šių teiginio formų teisingumo aibes:

a) $P(x)\wedge \overline{Q}(x)$; b) $\overline{P}(x)\vee \overline{Q}(x)$; c) $\overline{P}(x)\rightarrow Q(x)$;

d) $P(x)\leftrightarrow \overline{Q}(x)$; e) $(P(x)\rightarrow Q(x))\wedge(\overline{P}(x)\rightarrow Q(x))$.

4. Kvantoriai. Norėdami iš teiginio formos $P(x)$, $x \in X$ gauti teiginį, galime x pakeisti kuria nors viena jo reikšme $a \in X$. Bet yra kitas būdas, kaip iš teiginio formos gauti teiginį: reikia prieš teiginio formą parašyti kvantorių — žodį, apibūdinantį teiginio formos teisingumo aibę. Pavyzdžiui, „Visiems x iš X galioja ..." arba „Egzistuoja toks x iš X, kad ...". Antai iš teiginio formos „Žmogus x yra mėlynakis" gaunami teiginiai „Visi žmonės yra mėlynakiai" (klaidingas teiginys) arba „Yra mėlynakių žmonių" (teisingas teiginys). Kadangi matematinėje logikoje stengiamasi žodžius pakeisti simboliais, tai vietoj žodžių „Visiems x iš X galioja ..." sutarta rašyti $\forall\ x \in X$, o vietoj „Egzistuoja toks x iš X, kad ..." rašoma $\exists\ x \in X$. Čia $\forall$ — apversta pirmoji anglų kalbos žodžio all — „visi" raidė A, o $\exists$ — apversta pirmoji anglų kalbos žodžio exist — „egzistuoja" raidė E. Šiais simboliais žymimi atitinkamai bendrumo ir egzistavimo kvantoriai. Taigi bendrumo kvantorius rodo, kad teiginio formos teisingumo aibė T sutampa su visa aibe X, o egzistavimo kvantorius rodo, kad aibė T yra netuščia.

Užrašus $(\forall\ x \in X)\ P(x)$ ir $(\exists\ x \in X)\ P(x)$ galima perskaityti ir kitais žodžiais, nors tų posakių prasmė yra ta pati.

1. Užrašas $(\forall\ x \in X)\ P(x)$ dažniausiai skaitomas taip:

a) su bet kuria (kiekviena) x reikšme iš X reiškinys $P(x)$ yra teisingas;

b) bet kuris (kiekvienas) aibės X elementas x (X — kintamojo x reikšmių aibė) turi savybę P;

c) kad koks ir būtų x, $P(x)$ yra teisingas.

2. Užrašas $(\exists\ x \in X)\ P(x)$ dažniausiai skaitomas taip:

a) egzistuoja x reikšmė iš X, su kuria reiškinys $P(x)$ yra teisingas;

b) su kai kuriomis x reikšmėmis iš X reiškinys $P(x)$ yra teisingas;

c) yra bent viena x reikšmė iš X, su kuria reiškinys $P(x)$ yra teisingas;

d) egzistuoja aibės X elementas x, turintis savybę P; bent vienas aibės X elementas x turi savybę P; kai kurie aibės X elementai turi savybę P;

e) galima rasti x iš X, su kuriuo reiškinys $P(x)$ yra teisingas.

Kartais trumpinant praleidžiamas x reikšmių aibės simbolis ir rašoma tiesiog $\forall\ xP(x)$ arba $\exists\ xP(x)$.

Pateiksime pavyzdžių, kaip iš teiginių formų, panaudojus kvantorius, gaunami teiginiai. Tarkime, kad $P(x)$ reiškia „Skaičius x yra lyginis". Tuomet užrašas $(\forall\ x \in N)\ P(x)$ skaitomas taip: „Visi natūriniai skaičiai yra lyginiai" (klaidingas teiginys), o užrašas $(\exists\ x \in N)\ P(x)$ skaitomas taip: „Yra lyginių natūrinių skaičių". Trumpai rašoma: $\forall\ x\,P(x)$, $\exists\ x\,P(x)$; $x \in N$.

Pratimai

84. Suformuluokite šiuos teiginius žodžiais; ištirkite, kokie jie yra — teisingi ar klaidingi:

a) $(\forall x \in R)(x-1=x)$; b) $(\exists x \in R)\ (x-1=x)$;

c) $(\forall x \in R)\ (x-1 \neq x)$; d) $(\exists x \in R)\ (x-1 \neq x)$.

85. Visų natūrinių skaičių aibėje N yra apibrėžtos teiginio formos $P(x)$: „Skaičius x yra lyginis“ ir $Q(x)$: „Skaičius x yra kartotinis 4. Pasakykite žodžiais šiuos teiginius ir ištirkite, kurie jų teisingi:

a) $(\forall x \in N)\ P(x)$; b) $(\exists x \in N)\ \bar{P}(x)$;

c) $(\exists x \in N)\ Q(x)$; d) $(\forall x \in N)\ \bar{Q}(x)$.

86. Pažymėkite teiginio formas raidėmis ir parašykite simboliais šiuos teiginius:

a) yra toks realusis skaičius x, tinkantis lygčiai $x^2=4$;

b) bet kuris natūrinis skaičius yra lyginis;

c) yra toks realusis skaičius x, su kuriuo $5x=x-1$;

d) nėra racionaliojo skaičiaus x, su kuriuo $x^2=2$.

87. Pakeitę bendrumo ir egzistavimo kvantorius atitinkamais žodžiais, perskaitykite šiuos užrašus; raskite šių teiginių teisingumo reikšmes:

a) $\forall\ x((x+1)^2=x^2+2x+1)$;

b) $\exists\ x(x+1=2)$;

c) $\exists\ x(|x|<0)$;

d) $\forall\ x(|x|>0)$;

e) $\forall x\left(\frac{x^2-1}{x-1}=x+1\right)$;

f) $\exists\ y(y^2+y-5<0)$.

88. Taikydami kvantorių simbolius, parašykite šiuos teiginius:

a) kiekvienas skaičius lygus jam pačiam;

b) bet kuris skaičius yra ne didesnis už jį patį;

c) kad ir koks būtų skaičius y, jo kvadratas yra neneigiamas;

d) kiekvienas skaičius yra arba teigiamas, arba neigiamas, arba lygus 0;

e) yra skaičius x, su kuriuo $x-2=5$;

f) bent vienas skaičius x yra lygties $ax^2+bx+c=0$ šaknis;

g) lygtis $f(x)=0$ turi bent vieną šaknį;

h) aibė X yra netuščia;

i) kai kurie aibės X elementai turi savybę P.

89. Tarkime, kad $R(x)$ reiškia „x — realusis skaičius“, o $Q(x)$ — „x — racionalusis skaičius“.

Kiekvienam I dalies teiginiui priskirkite jį atitinkančią formuluotę iš II dalies. Raskite duotųjų teiginių teisingumo reikšmes:

I. a) $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$.
b) $\forall x(\bar{Q}(x) \rightarrow R(x))$.
c) $\exists x(Q(x) \wedge R(x))$.
d) $\exists x(\bar{Q}(x) \wedge R(x))$.

II. a) Kai kurie racionalieji skaičiai kartu yra realieji skaičiai.
b) Kiekvienas racionalusis skaičius — realusis.
c) Kai kurie racionalieji skaičiai nėra realieji skaičiai.
d) Kiekvienas racionalusis skaičius nėra realusis skaičius.

90. Tarkime, kad P reiškia savybę „Būti pirminiu skaičiumi", N — „Būti natūriniu skaičiumi", K — „Būti lyginiu skaičiumi". Parašykite simboliškai šiuos teiginius:
a) egzistuoja pirminis lyginis skaičius;
b) kiekvienas pirminis skaičius, didesnis už 2, yra nelyginis;
c) kiekvienas pirminis skaičius — natūrinis;
d) egzistuoja nelyginiai pirminiai skaičiai;
e) kai kurie pirminiai skaičiai yra lyginiai.

91. Kintamąjį susiekite su kvantoriumi taip, kad gautas teiginys būtų teisingas (kintamieji x, y, z iš a) —d) užduočių priklauso R):

a) $|x| = -x$;
b) $x^2 \geqslant 0$;
c) $y^2 + 2 \leqslant 0$;
d) $\sin z \neq 2$;
e) žodis x sudarytas iš 4 raidžių;
f) visi keliai iš taško x eina į pietus;
g) trikampio y vidaus kampų suma lygi $2d$.

92. Duotos teiginio formos $P(u)$: „Lygtis u turi realiąją šaknį", $A(x)$: „x mėgsta košę", $Q(y)$: „Pirminis skaičius y yra nelyginis", $B(m)$: „Daugiakampis m yra taisyklingas". Taikydami egzistavimo kvantorių, suformuluokite šiuos teiginius:
a) Ne kiekviena lygtis turi realiąją šaknį.
b) Ne su kiekvienu u galioja $P(u)$.
c) Ne visi mėgsta košę.
f) Ne kiekvienas pirminis skaičius yra nelyginis.
g) Ne kiekvienas daugiakampis yra taisyklingas.

93. Tarkime, kad $P(x)$ reiškia „Racionaliojo skaičiaus kvadratas lygus 2", $Q(y)$ — „Žmogus y turi motiną", $Q_1(y)$ — „Žmogus y yra nemirtingas". Taikydami bendrumo kvantorių, suformuluokite šiuos teiginius:

a) Nėra racionaliojo skaičiaus, kurio kvadratas lygus 2.
b) Nėra žmogaus, neturinčio motinos.
c) Nė vienas realusis skaičius netinka nelygybei $x^2+1<0$.
d) Nėra nė vieno nemirtingo žmogaus.

94. Patikrinkite ekvivalentumus, kai teiginio funkcija $P(x)$ reiškia „Zuikis x yra bailus", o $Q(x)$ — „Zuikis x yra greitakojis":

a) $(\forall x\in X)(P(x)\wedge Q(x))\Leftrightarrow(\forall x\in X)P(x)\wedge(\forall x\in X)Q(x)$;
b) $(\exists x\in X)(P(x)\vee Q(x))\Leftrightarrow(\exists x\in X)P(x)\vee(\exists x\in X)Q(x)$.

95. Duotos teiginio formos: $P(x)$ — „Žmogaus x ūgis yra didesnis kaip 180 cm" ir $Q(x)$ — „Žmogaus x ūgis yra mažesnis kaip 180 cm". Įrodykite, kad apskritai šie ekvivalentumai yra klaidingi:

a) $(\exists x\in X)(P(x)\wedge(Q(x))\Leftrightarrow(\exists x\in X)P(x)\wedge(\exists x\in X)Q(x)$;
b) $(\exists x\in X)P(x)\vee Q(x))\Leftrightarrow(\forall x\in X)P(x)\vee(\forall x\in X)Q(x)$.

96. Įrodykite, kad
a) $(\forall x\in X)P(x)\Rightarrow(\exists x\in X)P(x)$;
b) $(\exists x\in X)P(x)\Leftrightarrow\overline{(\forall x\in X)P(x)}$, ($X$ — netuščia aibė).

5*. Daugiavietės teiginio formos. Iki šiol nagrinėjome teiginio formas, priklausančias nuo vieno kintamojo. Paprastai jos susietos su aibės X elementų savybėmis. Nagrinėjant įvairių aibių ar tos pačios aibės elementų atitiktis, tenka naudotis teiginio formomis, turinčiomis keletą kintamųjų, pavyzdžiui: „Žmogus x gyvena mieste y", „Žmogus x — žmogaus y tėvas", „Skaičių x ir y suma yra didesnė už z" ir t. t. Kai teiginio forma priklauso nuo *dviejų* kintamųjų, ji vadinama *dviviete*, kai nuo *trijų* — *triviete* ir t. t. Dvivietė teiginio forma žymima $P(x, y)$, nurodant kiekvieno kintamojo reikšmių aibes, būtent $x\in X$, $y\in Y$.

Dvivietės teiginio formos $P(x, y)$, $x\in X$, $y\in Y$ teisingumo aibe vadiname porų (a, b) visumą, su kuriomis $P(a, b)$ yra teisingas teiginys; čia $a\in X$, $b\in Y$. Pavyzdžiui, kai $P(x, y)$ reiškia „Upė x įteka į jūrą y", šios formos teisingumo aibei priklauso poros (Šventoji, Baltijos jūra), (Volga, Kaspijos jūra), bet nepriklauso pora (Nemunas, Juodoji jūra). Visų porų (x, y) ($x\in X$, $y\in Y$) aibė vadinama aibių X ir Y Dekarto[1] sandauga ir žymima $X\times Y$. Taigi dvivietės teiginio formos teisingumo aibė yra Dekarto sandaugos $X\times Y$ poaibis.

Iš kiekvienos daugiavietės teiginio formos, prirašius prie kiekvieno kintamojo kvantorių, galima gauti teiginį. Kvantoriai gali būti ir vienodi (pavyzdžiui, bendrumo kvantoriai), ir skirtingi. Todėl iš dvivietės teiginio formos $P(x, y)$ galima sudaryti aštuonis teiginius (parašykite juos).

Pavyzdžiui, kai $P(x, y)$ reiškia „Upė x įteka į jūrą y", šie teiginiai skamba taip:

---

[1] R. Dekartas (1596—1650) — įžymus prancūzų matematikas ir filosofas, koordinačių metodo kūrėjas.

1) visos upės įteka į bet kurią jūrą;
2) į bet kurią jūrą įteka visos upės;
3) kiekvieną upę atitinka jūra, į kurią ji įteka;
4) kiekvieną jūrą atitinka į ją įtekanti upė;
5) yra upė, įtekanti į bet kurią jūrą;
6) yra jūra, į kurią įteka bet kuri upė;
7) yra upė, įtekanti į tam tikrą jūrą;
8) yra jūra, į kurią įteka tam tikra upė.

Nesunku suvokti, kad tiek teiginiai 1) ir 2), tiek 7) ir 8) yra ekvivalentūs: jei visos upės įteka į bet kurią jūrą, tai į bet kurią jūrą įteka visos upės, ir atvirkščiai; o jeigu yra upė, įtekanti į tam tikrą jūrą, tai yra jūra, į kurią įteka tam tikra upė, ir atvirkščiai. Apskritai teiginiai $\forall x \forall y P(x, y)$ ir $\forall y \forall x P(x, y)$ yra ekvivalentūs: jie tvirtina, kad $P(x, y)$ teisingumo aibė yra visa Dekarto sandauga $X \times Y$. Panašiai $\exists x \exists y P(x, y)$ ir $\exists y \exists x P(x, y)$ rodo, kad $P(x, y)$ teisingumo aibė yra netuščia.

Teiginiai $\forall y \exists x P(x, y)$ ir $\exists x \forall y P(x, y)$ yra skirtingi. Išnagrinėtame pavyzdyje pirmasis jų rodo, kad kiekvieną jūrą atitinka įtekanti į ją upė (tai, matyt, tiesa), o antrasis — kad yra upė, įtekanti į kiekvieną jūrą(tai, be abejo, netiesa). Taigi **vienodus kvantorius galima keisti vietomis, o skirtingų kvantorių keisti negalima.** Todėl iš tiesų gauname ne aštuonis, o tik šešis skirtingus teiginius. Nesunku įrodyti, kad implikacija $\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$ yra visada teisinga (jei būtų upė, įtekanti į visas jūras, tai tikriausiai į kiekvieną jūrą įtekėtų bent viena upė).

Prieš dvivietę teiginio formą parašę tik vieną kvantorių, gautume ne teiginį, o teiginio formą kintamojo, kuris liko laisvas, atžvilgiu. Pavyzdžiui, iš tos pačios teiginio formos $P(x, y)$ — „Upė x įteka į jūrą y" gauname keturias vienvietes teiginio formas:

1) $\forall x P(x, y)$ (visos upės įteka į jūrą y);
2) $\forall y P(x, y)$ (upė x įteka į visas jūras);
3) $\exists x P(x, y)$ (yra upė, įtekanti į jūrą y);
4) $\exists y P(x, y)$ (yra jūra, į kurią įteka upė x).

Pratimai

97. Tarkime, kad X — plokštumos tiesių aibė. Perskaitykite šiuos teiginius ir pasakykite, kurie teisingi:

a) $\forall x \exists y \ (x \parallel y)$;
b) $\exists x \exists y \ (x \perp y)$;
c) $\exists y \forall x \ (x \parallel y)$;
d) $\forall x \forall y \forall z \ ((x \parallel y \wedge y \parallel z) \rightarrow x \parallel z)$;
e) $\forall x \forall y \forall z \ ((x \perp y \wedge y \perp z) \rightarrow x \parallel z)$;
f) $\forall x \forall y \forall z \ ((x \parallel z \wedge y \parallel z) \rightarrow x \parallel y)$;
g) $\forall x \forall y \forall z \ ((x \perp y \wedge y \perp z) \rightarrow x \perp z)$.

98. Tarkime, kad natūrinių skaičių aibėje N yra apibrėžtos teiginio formos $P(x)$: „Skaičius x yra pirminis“ ir $x \vdots y$ ($x \vdots y$ reiškia, kad x dalijasi iš y be liekanos). Perskaitykite šiuos teiginius ir pasakykite, kurie jų teisingi.

a) $\exists y \forall x \ (x \vdots y)$; b) $\forall x \exists y \ (x \vdots y)$;
c) $\forall x \forall y \forall z \ ((x \vdots y \wedge y \vdots z) \rightarrow x \vdots z)$;
d) $\forall x \exists y \ ((P(y) \vee y=1) \wedge x \vdots y)$;
e) $\forall x \forall y \forall z \ ((xy \vdots z \wedge P(z)) \rightarrow (x \vdots z \vee y \vdots z))$;
f) $\forall x \forall y \ ((x \vdots y \wedge P(x)) \rightarrow (y=x \vee y=1)$.

99. Parašykite simboliškai šiuos teiginius:
a) jei x ir y — natūriniai skaičiai, kurių sandauga dalijasi iš pirminio skaičiaus p, tai bent vienas dauginamųjų dalijasi iš p;
b) kad ir kokia būtų plokštumos tiesė x ir koks bebūtų šios plokštumos taškas, visada yra tiesė, einanti per šį tašką ir lygiagreti tiesei x.

100. Perskaitykite šiuos teiginius ir raskite jų teisingumo reikšmes (a, b, x — realieji skaičiai):

a) $\forall x \exists a \ (3x+1=ax)$;
b) $\exists x \forall a \ (3x+1=ax)$;
c) $\exists b \forall a \exists x \ (x^2+ax+b=0)$;
d) $\exists a \forall b \exists x \ (x^2+ax+b=0)$.

101. Sugalvokite teiginio formą $P(x, a)$, iš kurios gautas teiginys $\exists x \forall a P(x, a)$ būtų teisingas.

102. Parašykite simboliškai šiuos teiginius:
a) funkcija 2^x yra teigiama su bet kuria argumento reikšme;
b) funkcija 2^x įgyja bet kurią teigiamą reikšmę.

103. Ar ekvivalentūs teiginiai „Kiekvieną uždavinį išsprendė bent vienas mokinys“ ir „Bent vienas mokinys išsprendė visus uždavinius“? Ar bent vienas jų išplaukia iš kito? Kodėl?
N u r o d y m a s. Teiginio formą „Mokinys x išsprendė uždavinį y“ pažymėję simboliu $P(x, y)$, parašykite šiuos teiginius simboliškai.

104. Įrodykite, kad

a) $(\forall x \in M) \ P(x) \Leftrightarrow \forall x (x \in M \rightarrow P(x))$;
b) $(\exists x \in M) \ P(x) \Leftrightarrow \exists x (x \in M \wedge P(x))$.

105. Parašykite simboliškai tvirtinimus:
a) kiekvienoje klasėje yra mokinys, kuris išsprendė bent vieną kontrolinio darbo uždavinį;
b) yra klasė, kurios kiekvienas mokinys išsprendė bent vieną kontrolinio darbo uždavinį;
c) kiekvienos klasės nors vienas mokinys išsprendė visus kontrolinio darbo uždavinius;
d) bet kuris kiekvienos klasės mokinys išsprendė bent vieną kontrolinio darbo uždavinį;

e) yra toks uždavinys, kurį išsprendė bent vienas kiekvienos klasės mokinys;

f) yra klasė, kurios visi mokiniai išsprendė visus kontrolinio darbo uždavinius;

g) kiekvieną uždavinį atitinka klasė, kurios visi mokiniai jį išsprendė.

Sugalvokite analogiškų teiginių. Kurie jų yra kitų teiginių išvada?

106. Parašykite simboliškai šiuos teiginius, nurodydami šalia kvantorių kintamųjų reikšmių aibes:

a) natūrinių skaičių aibėje yra mažiausias skaičius;

b) natūrinių skaičių aibė neturi didžiausio skaičiaus;

c) bet kurie du racionalieji skaičiai yra arba lygūs vienas kitam, arba vienas yra didesnis už kitą.

107. Koordinačių plokštumoje pavaizduokite teisingumo aibes šių teiginių:

a) $x^2=y^2$;

b) $x+2y=4$;

c) $x^2+y^2=9$;

d) $x^2+y^2\leqslant 9$;

e) $x^2+y^2>9$;

f) $x^2+y^2=0$;

g) $x^2+y^2=-4$;

h) $xy=0$;

i) $x>0\wedge y>0$;

j) $x>0\vee y>0$;

k) $(x>0)\wedge(y>0)\wedge\wedge(x^2+y^2\leqslant 9)$;

l) $x>0\rightarrow y>0$;

m) $x^2=y^2\leftrightarrow x=y$;

n) $xy<1\rightarrow xy=1$;

o) $|xy|\leqslant 0\rightarrow(x^2+y^2=0)$.

108. Kurie šių teiginių yra teisingi:

a) $(\forall x\in R)\ (\forall y\in R)\ (x^2=y^2\rightarrow x=y)$;

b) $(\forall x\in R)\ (\forall y\in R)\ (x=y\rightarrow x^2=y^2)$;

c) $(\forall x\in R_+)\ (\forall y\in R_+)\ (x^2=y^2\rightarrow x=y)$;

d) $(\forall x\in R)\ (\forall y\in R)\ (x^2=y^2\rightarrow |x|=|y|)$;

e) $(\forall x\in R)\ (\forall y\in R)\ ((xy>0\wedge y>0)\rightarrow x>0)$;

f) $(\forall x\in R)\ (\forall y\in R)\ (xy>0\rightarrow(x>0\wedge y>0))$;

g) $(\forall x\in R)\ (\forall y\in R)\ (xy>0\rightarrow(x>0\wedge y>0)\vee(x<0\wedge y<<0))$?

109. Raskite teisingumo aibes šių teiginio formų, priklausančių nuo kintamojo y iš R:

a) $(\forall x\in R)\ (x^2+y^2=1)$;

b) $(\forall x\in R)\ (x^2+y^2=0)$;

c) $(\exists x\in R)\ (x^2+y^2=1)$;

d) $(\exists x\in R)\ (xy<1)$;

e) $(\exists x\in R)\ (x^2+1<y)$;

f) $(\exists x\in R)\ (\sqrt{x^2-1}=y)$.

110. Naudodami teiginio formas $x=y$, $x<y$, $x\leqslant y$ (x ir y — natūriniai skaičiai) ir aritmetinių veiksmų žymėjimus, parašykite simboliškai šiuos teiginius:

a) skaičius x yra lyginis;
b) skaičius x yra dviejų natūrinių skaičių kvadratų suma;
c) skaičius x — pirminis;
d) skaičius x — sudėtinis;
e) skaičius x — skaičių 6 ir 8 bendras mažiausias kartotinis;
f) skaičiaus x dalybos iš 4 liekana lygi 1 arba 2.

6. Lygtys, nelygybės ir tapatybės. Kadangi lygtys ir nelygybės su kintamaisiais yra teiginio formos, tai viskas, ką pasakėme apie tokias formas, tinka lygtims ir nelygybėms. Pavyzdžiui, dvi lygtys (atitinkamai dvi nelygybės) vadinamos ekvivalenčiomis, kai jų teisingumo aibės sutampa, arba, kitaip tariant, kai jos turi tą pačią šaknų aibę. Pavyzdžiui, lygtis $x^2-8x+12=0$ ekvivalenti lygčiai $3x^2-24x+40=4$, nes jų abiejų šaknų aibę sudaro skaičiai 2 ir 6, $T=\{2; 6\}$. Nelygybė $2x>8$ ekvivalenti nelygybei $3x>12$, nes jų abiejų sprendinių aibė (t. y. teisingumo aibė) yra skaičių spindulys $]4; +\infty[$.

Spręsdami lygtis ir nelygybes, jas keičiame ekvivalenčiomis lygtimis ir nelygybėmis, t. y. pertvarkome, nepakeisdami jų teisingumo aibių. Tada gautojo sprendinio galima netikrinti, nes po kiekvieno žingsnio jis liko nepakitęs, todėl yra toks pat duotajai lygčiai ir lygčiai, gautai pertvarkius. Bet taip išspręsti lygtį pavyksta ne visada. Kartais pertvarkant duotoji lygtis pakeičiama ne ekvivalenčia jai lygtimi, o tik jos išvada. Kai, pertvarkę lygtį

$$f_1(x)=g_1(x), \qquad (1)$$

gauname lygtį

$$f_2(x)=g_2(x), \qquad (2)$$

kuri yra (1) lygties išvada, tai (2) lygties šaknų aibei priklauso (1) lygties šaknų aibė. Todėl, išsprendę (2) lygtį, dar turime patikrinti, ar tinka jos šaknys pradinei (1) lygčiai.

P a v y z d y s. Išspręskime lygtį

$$\sqrt{2x+1}=x-1.$$

Kai $a=b$, tai $a^2=b^2$. Todėl, pakėlę abi šios lygties puses kvadratu, gausime lygtį, kuri yra duotosios išvada:

$$2x+1=x^2-2x+1$$

(ji nebūtinai yra ekvivalenti pradinei lygčiai, nes iš $a^2=b^2$ neišplaukia $a=b$ — gali atsitikti taip, kad $a=-b$). Išsprendę šią lygtį, gauname $T_2=\{0; 4\}$. Patikrinsime šias šaknis, įrašydami jas į duotąją lygtį: $\sqrt{2\cdot0+1}=0-1$ (klaidinga lygybė); $\sqrt{2\cdot4+1}=4-1$ (teisinga lygybė). Vadinasi, šios lygties sprendinys yra $\{4\}$.

Kadangi beprasmius teiginius sutarėme laikyti klaidingais, tai lygties $g(x)$ šaknimis negali būti tos reikšmės, su kuriomis $f(x)$ arba $g(x)$ neturi prasmės. Todėl, prieš sprendžiant lygtį, pravartu rasti šias reikšmes; išmetę jas, gausime vadinamąją *lygties apibrėžimo sritį*. Skaičių, nepriklausančių šiai sričiai, galime ne-

tirti: iš anksto žinome, kad jie negali būti lygties šaknimis. Be to, lygties apibrėžimo sritis po tam tikrų pertvarkymų, laikomų paprastai tapačiais, gali pasikeisti. Pavyzdžiui, lygtys

$$2x+\frac{1}{x-3}=6+\frac{1}{x-3} \tag{3}$$

ir

$$2x=6$$

turi skirtingas apibrėžimo sritis — skaičius 3 nepriklauso (3) lygties apibrėžimo sričiai. Spręsdami (3) lygtį, iš pradžių ją pakeičiame lygtimi

$$2x+\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-3}=6+\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-3},$$

o paskui sutraukiame panašiuosius narius ir gauname lygtį $2x=6$. Bet drauge išplečiama apibrėžimo sritis, ir lygties $2x=6$ šaknis 3 netinka (3) lygčiai.

Lygties

$$f_1(x)\cdot f_2(x)=0$$

šaknimis gali būti tik tie skaičiai, su kuriais bent vienas dauginamasis $f_1(x)$, $f_2(x)$ yra lygus nuliui, be to, šie skaičiai turi priklausyti antrojo dauginamojo apibrėžimo sričiai. Todėl, pažymėję $f_1(x)$ apibrėžimo sritį ženklu T_1, o $f_2(x)$ — ženklu T_2, gauname teisingą ekvivalentumą

$$(f_1(x)\cdot f_2(x)=0)\Leftrightarrow((f_1(x)=0\vee f_2(x)=0)\wedge(x\in T_1\cap T_2)).$$

Šiuo ekvivalentumu pagrįstas lygčių sprendimo metodas, skaidant lygtis dauginamaisiais.

Dabar išnagrinėkime lygtį su dviem kintamaisiais. Tokios lygties teisingumo aibė vaizduojama visuma koordinačių plokštumos taškų $M(x, y)$, kurių koordinatės, įrašytos į duotąją lygtį, ją padaro teisinga lygybe. Pavyzdžiui, lygties $x^2+y^2=25$ teisingumo aibė yra apskritimas, kurio centras koordinačių pradžioje ir spindulys 5.

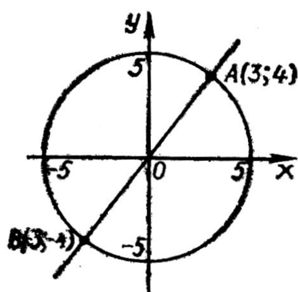
Kadangi lygties $f(x, y)=0$ teisingumo aibė paprastai yra begalinė, nagrinėjame tokių dviejų lygčių *sistemas,* t. y. *konjunkcijas*

$$(f_1(x, y)=0)\wedge(f_2(x, y)=0). \tag{4}$$

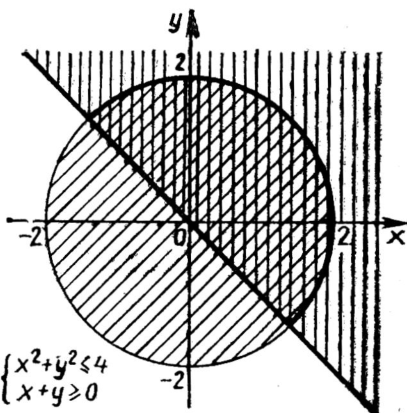
Mokykloje konjunkcijos paprastai užrašomos taip:

$$\begin{cases} f_1(x, y)=0,\\ f_2(x, y)=0. \end{cases} \tag{5}$$

Jau žinome, kad (4) konjunkcijos teisingumo aibė (t. y. (5) lygčių sistemos sprendinys) yra ją sudarančių lygčių teisingumo aibių sankirta. Tuo pagrįstas grafinis lygčių sistemų sprendimo būdas: plokštumoje pavaizduojama kiekvienos sistemos lygties teisingumo aibė ir randama gautųjų kreivių sankirta.



9 pav.



10 pav.

P a v y z d y s. Grafiškai išspręsime lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ 3y=4x. \end{cases}$$

Kadangi $x^2+y^2=25$ — apskritimo, kurio centras O (0, 0) ir spindulys 5, lygtis, o $3y=4x$ — tiesės lygtis, tai pakanka surasti tiesės ir apskritimo susikirtimo taškus (9 pav.). Randame du taškus: A (3; 4) ir B (−3; −4). Vadinasi, $T=\{(3;\ 4),\ (-3,\ -4)\}$.

Spręsdami lygčių sistemas, paprastai jas pakeičiame ekvivalenčiomis lygčių sistemomis. Kitaip tariant, sistemos lygtis pakeičiame kitomis lygtimis taip, kad nepakistų teisingumo aibių sankirta (nors atskirų lygčių pačios teisingumo aibės gali ir pakisti).

Visi šie samprotavimai taikytini ir *nelygybėms*. Pavyzdžiui, išspręsti nelygybių sistemą

$$\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 4, \\ x+y\geqslant 0 \end{cases}$$

yra tas pats, kaip rasti konjunkcijos

$$(x^2+y^2\leqslant 4)\wedge(x+y\geqslant 0)$$

teisingumo aibę. Todėl reikia rasti sričių, apibrėžiamų šiomis nelygybėmis, sankirtą (10 pav.).

Dabar išnagrinėkime *tapatybės* sąvoką. Mokykloje tapatybe paprastai vadinama lygybė su kintamaisiais, kuri yra teisinga, kad ir kokios būtų kintamojo reikšmės, pavyzdžiui

$$x^2+2x+1=(x+1)^2.$$

Užrašas

$$(\forall\, x\in R)\ (x^2+2x+1)=(x+1)^2$$

rodo, kad lygybė yra teisinga su visomis x reikšmėmis.

Pratimai

111. Išspręskite šias nelygybes:

a) $\frac{x^2-4}{x^2-16}\geqslant 0$; b) $\frac{x^2+x-2}{x^2-x+12}<0$; c) $x^2>0$;

d) $\frac{x^2-6x+8}{x^2-4}\geqslant 0$.

112. Išspręskite šias nelygybes:

a) $\frac{x^2-2}{x^2-1}\geqslant 0$; b) $\frac{x^2-7}{x^3+8}\leqslant 0$; c) $x^2+2x+2<0$;

d) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+8}\geqslant 0$.

113. Išspręskite šias lygčių ir nelygybių disjunkcijas ir konjunkcijas:

a) $(x+y=9)\wedge(xy=14)$;
b) $(x^2+y^2=169)\wedge(x^2-y^2=119)$;
c) $(x^2+y^2=29)\wedge(xy=10)$;
d) $(x^2+8x+11=0)\vee(x^2-6x+8=0)$;
e) $(x^2-20x+64=0)\vee(|x-3|+|x+2|=5)$;
f) $(|x-7|+|x+3|=10)\vee(|x-2|+|x+10|=12)$;
g) $(y<9-x^2)\wedge(y\geqslant x^2)$;
h) $(x^2+y^2\leqslant 25)\wedge(x+y=-1)$;
i) $(x^2+y^2\leqslant 25)\wedge(y>x^2)$;
j) $(y\geqslant\frac{1}{2}x^2)\wedge(y\geqslant\frac{3}{2}x-1)$;
k) $(x^2+y^2\leqslant 25)\wedge(y=\frac{4}{9}x^2)$;
l) $(2x-3>x-5)\vee(x^2-4x+3>0)$;
m) $(x^2+y^2\leqslant 9)\wedge(x+y\geqslant 0)$;
n) $((x-2y)(x+y)=0)\wedge(x^2+y^2=50)$;
o) $(x^2-3xy+2y^2=0)\wedge(x+4y=5)$.

7. Teiginių su kvantoriais neigimas. Teiginio „Visi vilkai pilki" neiginys anaiptol nėra sakinys „Visi vilkai nepilki". Iš tikrųjų, pamatę bent vieną baltą vilką, įsitikintume, kad teiginys „Visi vilkai pilki" klaidingas. Taigi, kad teiginys $(\forall x\in X)\ P(x)$ būtų klaidingas, pakanka surasti bent vieną aibės X elementą a, su kuriuo $P(a)$ yra klaidingas, t. y. $\overline{P}(a)$ — teisingas. Bet tada bus teisingas teiginys $(\exists\ x\in X)\ \overline{P}(x)$. Atvirkščiai, kai teiginys $(\exists x\in X)\ \overline{P}(x)$ teisingas, tai $(\forall\ x\in X)\ P(x)$ klaidingas. Taigi įrodėme, kad

$$\overline{(\forall x\in X)\ P(x)}\Leftrightarrow(\exists x\in X)\ \overline{P}(x). \qquad (6)$$

Pažymėję $\overline{P}(x)$ simboliu $Q(x)$ ir paneigę abi (6) lygybės puses, gauname

$$(\forall x\in X)\overline{Q}(x)\Leftrightarrow\overline{(\exists x\in X)Q(x)}. \qquad (7)$$

Iš tikrųjų, neigdami, kad yra bent vienas aibės X elementas a, su kuriuo yra teisingas teiginys $Q(a)$, kartu tvirtiname, kad visiems aibės X elementams yra teisingas teiginio formos $Q(x)$ neiginys, t. y. $\overline{Q}(x)$.

Kai teiginyje yra keli kvantoriai, kiekvienam jų taikome gautą taisyklę. Pavyzdžiui

$$\overline{\exists x\in X)\ (\forall\, y\in Y)\ P(x,\ y)} \Leftrightarrow (\forall\, x\in X)\ (\exists y\in Y)\ \overline{P}(x,\ y). \qquad (8)$$

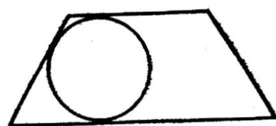
P a v y z d ž i a i

1. Tarkime, kad $P(x)$ — teiginio forma „Natūrinis skaičius x dalijasi iš 7“. Tuomet $\forall\ xP(x)$ — „Visi natūriniai skaičiai dalijasi iš 7“ (klaidingas teiginys), o šio teiginio neiginys $\overline{\forall\ xP(x)}$ reiškia „Ne visi natūriniai skaičiai dalijasi iš 7“ (teisingas teiginys). Šį neiginį galime parašyti taip: $\exists\ x\overline{P}(x)$. Tuomet jį perskaitysime „Yra natūrinis skaičius, kuris nesidalija iš 7“. Teiginį $\exists\ xP(x)$ skaitome taip: „Yra natūrinių skaičių, kurie dalijasi iš 7“ (teisingas teiginys), o $\overline{\exists\ xP(x)}$ reiškia „Nėra natūrinių skaičių, kurie dalijasi iš 7“ (klaidingas teiginys). Vietoj $\overline{xP(x)}$ galima parašyti $\forall\ x\overline{P}(x)$. Pastarasis teiginys toks: „Visi natūriniai skaičiai nesidalija iš 7“.

2. Tarkime, $P(x)$ — teiginio forma „x turi 8 kojas“. Tuomet $\forall\ xP(x)$ reiškia „Visi x turi po 8 kojas“, $\exists\ xP(x)$ — „Yra x su 8 kojomis“, $\overline{\forall\ xP(x)}$ — „Ne visi x turi po 8 kojas“ arba, kitais žodžiais tariant, „Yra x, kuris turi ne 8 kojas“, o $\overline{\forall\ xP(x)}$ — „Nėra x su 8 kojomis“, arba, tas pats, „Nė vienas x neturi 8 kojų“. Kai X — kiškių aibė, teisingi teiginiai $\overline{\forall\ xP(x)}$ ir $\overline{\exists\ xP(x)}$, o klaidingi — $\overline{\forall\ xP(x)}$ ir $\overline{\exists\ xP(x)}$. O kai X — vorų aibė, teisingi teiginiai $\forall\ xP(x)$ ir $\exists\ xP(x)$, o klaidingi — $\overline{\forall\ xP(x)}$ ir $\overline{\exists\ xP(x)}$. Kai X — visų gyvų būtybių aibė, teisingi teiginiai $\overline{\forall\ xP(x)}$ ir $\exists xP(x)$.

3. Tarkime, $P(x,\ y)$ reiškia „Žmogus y gimė y metais“. Tuomet $\forall\, y\,\exists\ xP(x,\ y)$ skaitomas „Kiekvienus metus y atitinka gimęs tais metais žmogus x“. Šio teiginio neiginys $\exists\ y\,\forall\, x\overline{P}(x,\ y)$ reiškiantis, kad yra metai y, kuriais negimė nė vienas žmogus.

4. Tarkime, $P(x,\ y)$ reiškia „Apskritimas x įbrėžtas į keturkampį y“. Tuomet $\forall\ y\,\exists\, xP(x,\ y)$ reiškia teoremą „Kiekvieną keturkampį atitinka įbrėžtas į jį apskritimas“. Šio teiginio neiginys $\exists\, y\,\forall\, x\overline{P}(x,\ y)$ „Yra keturkampis, į kurį neįbrėžtas nė vienas apskritimas“. Kadangi tokių keturkampių tikrai yra (11 pav.), teoremos neiginys teisingas, o pati teorema klaidinga. O teorema $\forall\, y\,\exists\, xP(x,\ y)$, kai $P(x,\ y)$, reiškia „Apskritimas x įbrėžtas į kvadratą y“, yra teisinga: į bet kurį kvadratą galima įbrėžti apskritimą. Ji teisinga ir tada, kai $P(x,\ y)$ reiškia „Apskritimas x įbrėžtas į trikampį y“.



11 pav.

Pratimai

114. Tarkime, $P(x)$ — teiginio forma „Skaičius x dalijasi iš 5“, o $Q(x)$ reiškia „Skaičius x lyginis“. Perskaitykite teiginį

$$(\exists x \in N)\ (P(x) \wedge Q(x))$$

ir suformuluokite jo neiginį.

115. Tarkime, kad $P(x, y)$ — teiginio forma „Apskritimas x įbrėžtas į trikampį y“. Perskaitykite teiginius:

a) $\forall x \forall y\ P(x, y)$; b) $\exists x \forall y\ P(x, y)$;
c) $\forall x \exists y\ P(x, y)$; d) $\forall y \exists x\ P(x, y)$;
e) $\exists y \forall x\ P(x, y)$; f) $\exists x \exists y\ P(x, y)$

ir suformuluokite jų neiginius.

116. Naudodami dvejopus kvantorius, suformuluokite šių sakinių neiginius ir įrodykite arba paneikite juos:

a) visi pirminiai skaičiai yra nelyginiai;

b) kiekvienas keturkampis, kurio įstrižainės statmenos viena kitai,— rombas;

c) visos lygties $|x| = -1$ šaknys — racionalieji skaičiai;

d) visi tuščios aibės elementai priklauso aibei M;

e) bet koks nelygybės $x^2 < 0$ sprendinys yra lygties $x^2 - 9 = 0$ sprendinys;

f) kiekviena kvadratinė lygtis turi realiąją šaknį.

117. Parašykite simboliškai šiuos teiginius ir jų neiginius; raskite teiginių ir jų neiginių teisingumo reikšmes:

a) kad ir koks būtų racionalusis skaičius x, visada galima rasti tokį racionalųjį skaičių y, kad $x + y = x$;

b) yra natūrinis skaičius x ir toks, kad su kiekvienu natūriniu skaičiumi y galioja lygybė $x + y = y$;

c) yra sveikasis skaičius x ir toks, kad su bet kuriuo sveikuoju y galioja lygybė $x + y = 0$;

d) bet kuris sveikasis skaičius turi priešingą;

e) kad ir koks būtų natūrinis skaičius x, visada galima rasti skaičių y ir tokį, kad $xy = x$;

f) yra sveikasis skaičius x, kurio sandauga su bet kuriuo sveikuoju skaičiumi lygi x;

g) koks bebūtų skaičius, nelygus 0, galima rasti skaičių, kurio sandauga iš duotojo lygi 1;

h) yra skaičius, kurio sandauga iš bet kurio kito skaičiaus, nelygaus 0, lygi 1.

118. Suformuluokite šių teiginių neiginius teigiamąja forma (t. y. taip, kad teiginio neiginys neprasidėtų žodžiais „ne“ arba „netiesa, kad“):

a) kiekviename mieste yra rajonas, kurio kiekvienoje mokykloje yra klasė, kurios visi mokiniai mokosi be trejetų;

b) yra miestas, kurio kiekviename rajone yra futbolo komanda, kurios visi žaidėjai yra ne vyresni kaip 18 metų;

c) kiekviename mieste yra gatvė, kurioje bent vieno namo visi langai į pietus;

d) yra knyga, kurios kiekviename puslapyje yra ne mažiau kaip viena eilutė, kurioje raidė „y" pasikartoja bent du kartus;

e) kiekvieno miesto bent vienoje gatvėje pastatyti tik tokie namai, kuriuose yra vieno kambario butų.

8*. Matematinės teoremos struktūra. Dauguma matematikos teoremų formuluojamos taip: tam tikroje aibėje X iš teiginio formos $A(x)$ išplaukia $B(x)$. Tokias teoremas galima parašyti taip:

$$(\forall x \in X)\ (A(x) \to B(x)). \qquad (1)$$

Šios teoremos susideda iš trijų dalių: pirmoje dalyje apibūdinama aibė X, kurios elementų sąryšius nagrinėja ši teorema, antroji dalis yra forma $A(x)$ (teoremos sąlyga) ir trečioji dalis — forma $B(x)$ (teoremos išvada).

Pavyzdžiai

1. Teoremoje „Jei lygiagretainio įstrižainės lygios, jis yra stačiakampis", x — visų lygiagretainių aibė, $A(x)$ — forma „Lygiagretainio x įstrižainės lygios", $B(x)$ — forma „Lygiagretainis x yra stačiakampis". Ši teorema teisinga.

2. Teoremoje „Jei paskutinis natūrinio skaičiaus x skaitmuo lygus 0 arba 5, šis skaičius dalijasi iš 5", X — natūrinių skaičių aibė, $A(x)$ — „Paskutinis skaičiaus X skaitmuo lygus 0 arba 5" ir $B(x)$ — „Skaičius x dalijasi iš 5". Šiame pavyzdyje sąlyga yra dviejų teiginio formų $A_1(x)$ ir $A_2(x)$ disjunkcija; čia $A_1(x)$ — „Paskutinis skaičiaus x skaitmuo lygus 0", $A_2(x)$ — „Paskutinis skaičiaus x skaitmuo lygus 5". Todėl šią teoremą galima parašyti taip:

$$(\forall x \in N)\ ((A_1(x) \land A_2(x)) \to B(x)).$$

3. Teoremoje „Jei paskutinis natūrinio skaičiaus x skaitmuo lygus 3, šis skaičius dalijasi iš 3", X — natūrinių skaičių aibė, $A(x)$ — „Skaičiaus x paskutinis skaitmuo lygus 3", $B(x)$ — „Skaičius x dalijasi iš 3". Ši teorema klaidinga. Teiginys $A(13)$ teisingas, o $B(13)$ klaidingas (skaičiaus 13 paskutinis skaitmuo lygus 3, bet šis skaičius nesidalija iš 3). Taigi, norint įrodyti, kad (1) teorema klaidinga, pakanka surasti bent vieną elementą $x \in X$, su kuriuo $A(x)$ teisingas, o $B(x)$ klaidingas.

Teoremoje gali būti ir kelių kintamųjų teiginio formų. Pavyzdžiui, teorema „Didesnį apskritimo lanką atitinka didesnė styga" užrašoma taip:

$$\forall x \forall y (A(x, y) \to B(x, y)).$$

Čia x ir y — apskritimo lankai, $A(x, y)$ reiškia „Lankas x didesnis už lanką y", $B(x, y)$ — „Styga, kuri remiasi į lanką x, didesnė už stygą, kuri remiasi į lanką y".

Be to, ne visada teoremų užrašuose tiesiogiai vartojama implikacija. Pavyzdžiui, sudėties komutatyvumo dėsnis užrašomas

$$\forall x \forall y (x+y=y+x).$$

Šiame užraše yra teiginio forma $x+y=y+x$, ir dėsnis tvirtina, kad ji yra teisinga, kokie bebūtų skaičiai x ir y. Teorema „Kiekvieną trikampį atitinka į jį įbrėžtas apskritimas" užrašoma taip:

$$\forall x \exists y A(x, y);$$

čia $A(x, y)$ reiškia „Apskritimas y įbrėžtas į trikampį x".

Yra ir sudėtingesnės struktūros teoremų. Jose ir sąlyga, ir išvada yra kelių teiginio formų disjunkcija arba konjunkcija. Tačiau bendra teoremos struktūra dažniausiai turi (1) išraišką.

Analogiškai atvirkštinės ir priešingosios implikacijos sąvokoms apibrėšime tiesioginę, atvirkštinę ir priešingąją teoremą. Teoremai

$$(\forall x \in X)\ (A(x) \rightarrow B(x)) \qquad (2)$$

atvirkštine vadinsime teoremą

$$(\forall x \in X)\ (B(x) \rightarrow A(x)), \qquad (3)$$

priešingąja duotajai vadinsime teoremą

$$(\forall x \in X)\ (\bar{A}(x) \rightarrow \bar{B}(x)), \qquad (4)$$

o atvirkštine priešingajai vadinsime teoremą

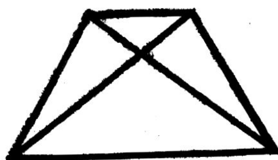
$$(\forall x \in X)\ (\bar{B}(x) \rightarrow \bar{A}(x)). \qquad (5)$$

Tiek (3) ir (4) teorema, tiek (2) ir (5) yra ekvivalenčios.

P a v y z d ž i a i

1. Teorema „Kiekvieno kvadrato įstrižainės yra lygios" galima parašyti (2) išraiška; čia X — visų keturkampių aibė, $A(x)$ — „Keturkampis x yra kvadratas", o $B(x)$ — „Keturkampio x įstrižainės yra lygios". Vadinasi, atvirkštinė (3) teorema yra tokia: „Jei keturkampio įstrižainės lygios, šis keturkampis yra kvadratas". Priešingoji (4) teorema tokia: „Jei keturkampis nėra kvadratas, jo įstrižainės nėra lygios". Pagaliau (5) teorema, atvirkštinė priešingajai, tokia: „Jei keturkampio įstrižainės nėra lygios, šis keturkampis nėra kvadratas". Šį kartą teisingos yra tiesioginė teorema ir teorema, atvirkštinė priešingajai, o atvirkštinė ir priešingoji yra klaidingos. 12 paveiksle nubraižytas keturkampis, kuris nėra kvadratas, nors jo įstrižainės ir lygios.

2. Teorema, atvirkštinė teoremai „Jei lygiagretainio įstrižainės lygios, tai šis lygiagretainis yra stačiakampis" formuluojama taip: „Jei lygiagretainis yra stačiakampis, jo įstrižainės lygios" (arba, trumpiau, „Bet kurio stačiakampio įstrižainės yra lygios"). Šį kartą teisinga ir tiesioginė, ir atvirkštinė teorema. Todėl jas galima pakeisti viena teorema:



12 pav.

„Lygiagretainis yra stačiakampis tada ir tik tada, kai jo įstrižainės lygios“ arba kitaip:

„Kad lygiagretainis būtų stačiakampis, būtina ir pakanka, jog jo įstrižainės būtų lygios“.

Ši teorema turi išraišką

$$(\forall x \in X)\ (A(x) \rightarrow B(x)); \qquad (6)$$

čia X — lygiagretainių aibė, $A(x)$ reiškia „Lygiagretainis x yra stačiakampis“, o $B(x)$ — „Lygiagretainio x įstrižainės yra lygios“. Visos tokios išraiškos teoremos yra ekvivalenčios atvirkštinėms teoremoms, taip pat joms priešingoms teoremoms: jos arba kartu teisingos, arba kartu klaidingos. Šį kartą visos teoremos teisingos. Bet jei lygiagretainių aibę pakeistume visų keturkampių aibe, (6) išraiškos teorema būtų klaidinga. Teisinga būtų tik teorema $(\forall x \in X)\ (A(x) \rightarrow B(x))$, o atvirkštinė jai teorema būtų klaidinga, nes yra keturkampių, kurie nėra stačiakampiai, nors jų įstrižainės ir lygios.

Pratimai

119. Parašykite simboliškai lygiagretumo aksiomą (per kiekvieną tašką eina ne daugiau kaip viena tiesė, lygiagreti duotajai) ir jos neiginį. Suformuluokite žodžiais neiginį.

120. Parašykite simboliškai:

a) periodinės funkcijos, apibrėžtos aibėje R, apibrėžimą (funkcija vadinama periodine, kai yra skaičius $l \neq 0$, su kuriuo $f(x-l) = f(x) = f(x+l)$, kad ir koks būtų x);

b) tvirtinimo „Funkcija f nėra periodinė“ teisingumo būtiną ir pakankamą sąlygą.

121. Įrodykite, kad funkcija f nėra periodinė, kai: a) $f(x) = x^2$; b) $f(x) = [x]$; čia $[x]$ — sveikoji skaičiaus x dalis.

122. Parašykite simboliškai:

a) lyginės funkcijos apibrėžimą (funkcija f vadinama lygine, kai kiekvieną kintamojo x reikšmę iš apibrėžimo srities atitinka reikšmė $-x$, irgi priklausanti apibrėžimo sričiai; kad ir koks būtų x iš f apibrėžimo srities, galioja lygybė $f(-x) = f(x)$);

b) nelyginės funkcijos apibrėžimą (funkcija f vadinama nelygine, kai kiekvieną kintamojo x reikšmę iš apibrėžimo srities atitinka reikšmė $-x$, irgi priklausanti apibrėžimo sričiai; kad ir koks būtų x iš f apibrėžimo srities, galioja lygybė $f(-x) = -f(x)$);

c) tvirtinimų „Funkcija f nėra lyginė“ ir „Funkcija f nėra nelyginė“ teisingumo būtiną ir pakankamą sąlygą.

123. Dvi skirtingos funkcijos apibrėžtos ta pačia formule. Ar gali būti, kad viena jų lyginė, o kita nelyginė?

124. Parašykite simboliškai šias teoremas ir suformuluokite joms atvirkštines, priešingas ir atvirkštines priešingoms teoremas. Suformuluokite gautųjų teoremų neiginius. Kurios teoremos teisingos?

a) Kai trikampio ABC kampas B statusis, tai

$$|AB|^2+|BC|^2=|AC|^2.$$

b) Kai keturkampis $ABCD$ yra lygiagretainis, jo įstrižainės dalija viena kitą pusiau.

c) Bet kuris lygiagretainis turi simetrijos centrą.

d) Kai natūrinio skaičiaus dešimtainio užrašo skaitmenų suma dalijasi iš **5**, tai šis skaičius dalijasi iš **5**.

e) Kai tiesė a lygiagreti tiesei b, o tiesė b lygiagreti tiesei c, tai tiesė a lygiagreti tiesei c.

f) Kai tiesė a statmena tiesei b, o tiesė b lygiagreti tiesei c, tai tiesės a ir c statmenos.

KOORDINAČIŲ PLOKŠTUMOS AIBĖS

Jau nuo V klasės mokykloje braižomi įvairių funkcinių priklausomybių grafikai: tiesinės $y=kx+b$, kvadratinės $y=ax^2$, atvirkščiojo proporcingumo $y=\frac{k}{x}$ ir t. t. Tačiau dažnai susiduriame su sudėtingesnėmis funkcinėmis priklausomybėmis. Plečiantis nagrinėjamų funkcijų klasei, plečiasi kreivių, jų grafikų klasė. Nagrinėjami ne tik funkcijų grafikai, bet ir lygčių su dviem kintamaisiais $F(x, y)=0$ grafikai. *Lygties* $F(x, y)=0$ *grafiku* vadinama visų taškų $M(a, b)$, kurių koordinatės tenkina šią lygtį, aibė Γ; $F(x, y)=0$ vadinama *aibės* Γ *lygtimi.*

Šiame skyriuje nagrinėsime, kaip pagal geometrinį kreivės apibrėžimą gaunama jos lygtis, kaip iš kurios nors kreivės lygties galima išvesti kitų kreivių, gaunamų iš pastarosios įvairiomis geometrinėmis transformacijomis, lygtis, taip pat — kaip braižomi funkcijų grafikai.

KREIVIŲ LYGČIŲ IŠVEDIMAS PAGAL JŲ GEOMETRINES SAVYBES

1. Koordinačių tiesė. Norint apibrėžti tiesės kryptį ir ilgio matavimo vienetą, pakanka pažymėti du skirtingus jos taškus — O ir E; kryptį iš O į E laikysime tiesės kryptimi, o atkarpos OE ilgį — ilgių matavimo *vienetu.* Pažymėkime dar bet kur tiesėje OE tašką M. Šis taškas gali būti tiek „į dešinę“, tiek ir „į kairę“ nuo taško O (ir, aišku, M gali sutapti su O). Kai M nesutampa su O, spinduliai OM ir OE gali būti vienakrypčiai arba priešpriešiai. Taško M *koordinate* pavadinsime atkarpos OM ilgį, paimtą su pliuso ženklu, kai spinduliai OM ir OE vienakrypčiai, ir su minuso ženklu, kai šie spinduliai priešpriešiai. Sakysime, kad taško O koordinatė lygi nuliui.

Taškų porą (O, E) pavadinsime tiesės *koordinačių sistema,* o pačią tiesę, kurioje apibrėžta koordinačių sistema, *koordinačių tiese* arba *ašimi.* Tuomet tašką O vadinsime *koordinačių pradžia.*

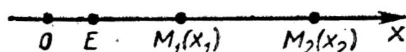
Kad taškas M turi koordinatę x, simboliškai užrašome taip: $M(x)$. Pavyzdžiui, $O(0)$, $E(1)$ ir t. t.

Galima įrodyti, kad visų realiųjų skaičių aibės ir tiesės taškų aibės atitiktis $x \to M(x)$ yra abipusė ir vienareikšmė (nors norėdami tai griežtai įrodyti, visų pirma turėtume išsiaiškinti, kas yra skaičius ir kas yra taškas).

Išnagrinėsime bet kurį koordinačių tiesės tašką $M(x)$. Nesunku suvokti, kad atkarpos OM ilgis ir taško M koordinatė x susieti sąryšiu

$$|OM|=|x|. \qquad (1)$$

Kitaip tariant, **taško *M* koordinatės modulis geometriškai yra ilgis atkarpos, esančios tarp koordinačių pradžios ir taško *M*.**



1 pav.

(1) formulę apibendrinsime, išvedę atstumo tarp bet kurių dviejų koordinačių tiesės taškų formulę.

Tarkime, kad koordinačių tiesėje pažymėti du taškai: $M_1(x_1)$ ir $M_2(x_2)$ (1 pav.). Įrodysime, kad

$$|M_1M_2| = |x_1 - x_2|. \quad (2)$$

Norint įrodyti (2) formulę, pakanka išnagrinėti visus atvejus, kaip gali būti išsidėstę vienas kito atžvilgiu taškai O, M_1 ir M_2. Kai, pavyzdžiui, M_2 yra tarp M_1 ir O, be to, $\overrightarrow{OM_1}$ (vadinasi, ir $\overrightarrow{OM_2}$) yra tos pačios krypties, kaip ir koordinačių ašis, tai taškų M_1 ir M_2 koordinatės bus teigiamos, t. y.

$$|x_1| = x_1,$$
$$|x_2| = x_2,$$

be to, $x_1 > x_2$. Tuomet

$$|M_1M_2| = |OM_1| - |OM_2| = |x_1| - |x_2| = x_1 - x_2 = |x_1 - x_2|.$$

Analogiškai nagrinėjami ir kiti atvejai. Taigi **atstumas tarp koordinačių tiesės taškų lygus jų koordinačių skirtumo moduliui.**

Šį faktą dažnai taikome, spręsdami „mintyse" lygtis ir nelygybes. Tarkime, reikia išspręsti lygtį

$$|x - 2| = 1. \quad (3)$$

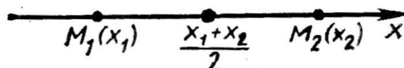
Šį užrašą „išversime" į geometrijos kalbą. (3) sąlyga reiškia, kad atstumas nuo taško, kurio koordinatė x nežinoma, iki taško, kurio koordinatė 2, lygus 1. Aišku, kad šią sąlygą tenkina tik du koordinačių tiesės taškai, esantys skirtingose taško su koordinate 2 pusėse ir nutolę nuo jo atstumais, lygiais 1. Tai taškai, kurių koordinatės lygios 1 ir 3. Todėl lygties sprendinys yra $\{1, 3\}$. Analogiškai nelygybės

$$|x - 2| < 1 \quad (4)$$

sprendinys yra intervalas $]1, 3[$, nes, „išvertę" (4) sąlygą į geometrijos kalbą, gauname, kad taškai, kurių koordinatės x, nutolę nuo taško, kurio koordinatė 2, atstumu, mažesniu už 1.

Pravartu dar žinoti formulę, kuri išreiškia atkarpos, esančios tarp taškų $M_1(x_1)$ ir $M_2(x_2)$, vidurio taško $M(x)$ koordinatę (2 pav.):

$$x_{\text{vid}} = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$



2 pav.

Siūlome šią formulę mokiniams įrodyti savarankiškai.

Pratimai

1. Apskaičiuokite atstumą tarp taškų: a) $M_1(3)$, $M_2(8)$; b) $M_1(9)$, $M_2(1)$; c) $M_1(-7)$, $M_2(10)$; d) $M_1(-5)$, $M_2(-1)$; e) $M_1(-3)$, $M_2(0)$.

2. Išspręskite „mintyse" lygtis:

$$|x-5|=2; \qquad |x-(-5)|=2;$$
$$|x+3|=1; \qquad |x-2|=|x-4|.$$

3. Išspręskite nelygybes:

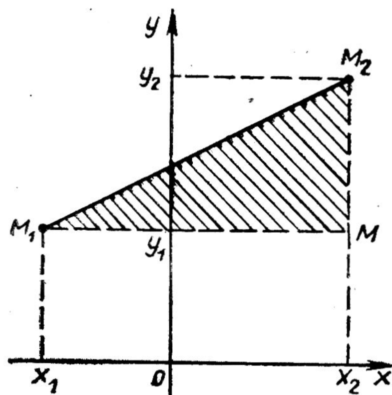
$$|x|<4, \qquad |x-1|<2;$$
$$|x-1|>2; \qquad |x-5|\leqslant 1;$$
$$|x-5|>1; \qquad 1\leqslant|x-5|\leqslant 2.$$

4. Raskite taškų B, C, E, dalijančių atkarpą M_1M_2 į keturias lygias dalis, koordinates, kai $M_1(-4)$, $M_2(8)$.

2. Plokštumos koordinatės. Norėdami apibrėžti taško padėtį plokštumoje, turime nurodyti du skaičius. Pažymėkime tris taškus O, E_1, E_2 taip, kad tiesės OE_1 ir OE_2 būtų statmenos, o atkarpos OE_1 ir OE_2 — lygios. Poros (O, E_1) ir (O, E_2) apibrėžia šiose tiesėse koordinačių sistemas. Pažymėkime plokštumos tašką M ir nubrėžkime iš jo statmenis MM_1 ir MM_2 tiesėms OE_1 ir OE_2. Šių tiesių taškai M_1 ir M_2 turi jose koordinates, kurias pažymėsime atitinkamai x ir y. Įprasta x vadinti taško M abscise, o y — jo *ordinate*. Todėl ašis OE_1 vadinama *abscisių ašimi,* o ašis OE_2 — *ordinačių ašimi.*

Plokštuma, kurioje parinkta koordinačių sistema (O, E_1, E_2), vadinama ***koordinačių plokštuma,*** taškas O vadinamas ***koordinačių pradžia.*** Abscisių ir ordinačių ašys dalija koordinačių plokštumą į 4 dalis, vadinamas ***ketvirčiais*** arba ***koordinačių kampais.***

Taigi kiekvieną koordinačių plokštumos tašką M atitinka skaičių pora (x, y) — šio taško ***koordinatės.*** Atvirkščiai, kiekvieną skaičių porą (x, y) atitinka koordinačių plokštumos taškas M, turintis koordinates x ir y. Tašką M, kurio koordinatės (x, y), žymėsime $M(x, y)$.



3 pav.

Išvesime atstumo tarp koordinačių plokštumos taškų $M_1(x_1, y_1)$ ir $M_2(x_2, y_2)$ formulę (3 pav.). Pagal Pitagoro teoremą gauname

$$|M_1M_2| = \sqrt{|M_1M|^2 + |MM_2|^2}.$$

Bet atstumas tarp taškų M_1 ir M lygus atstumui tarp jų projekcijų abscisių ašyje N_1 ir N_2. Taškų N_1 ir N_2 abscisės yra ati-

tinkamai lygios x_1 ir x_2, todėl pagal (2) formulę $|N_2N_1|=|x_2-x_1|$. Vadinasi, ir $|MM_1|=|x_2-x_1|$. Analogiškai įsitikiname, kad $|MM_2|=|y_2-y_1|$. Kadangi $|a|^2=a^2$, tai

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \qquad (5)$$

Panašiai, projektuodami atkarpą M_1M_2 į koordinačių ašis, įsitikiname, kad atkarpos M_1M_2, kai $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, vidurio taško $M(x, y)$ koordinatės yra išreiškiamos formulėmis:

$$x_{\text{vid}}=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y_{\text{vid}}=\frac{y_1+y_2}{2}. \qquad (6)$$

Pratimai

5. Apskaičiuokite atstumą tarp taškų: $A(0, -1)$, $B(-4, 2)$; $A(3, -4)$, $O(0, 0)$.

6. Pažymėti taškai $A(-4, 2)$, $B(3, 8)$, $C(4, 4)$. Raskite taškus, simetriškus jiems atžvilgiu:

a) abscisių ašies;
b) ordinačių ašies;
c) koordinačių pradžios;
d) pirmojo ir trečiojo koordinačių kampų pusiaukampinės;
e) antrojo ir ketvirtojo koordinačių kampų pusiaukampinės.

7. Įsitikinkite, kad trikampis ABC, kurio viršūnės $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(5, -1)$, yra statusis.

8. Pažymėti taškai $A(-5, 6)$ ir $B(3, 1)$.

a) Raskite koordinates taško M, simetriško taškui A taško B atžvilgiu.

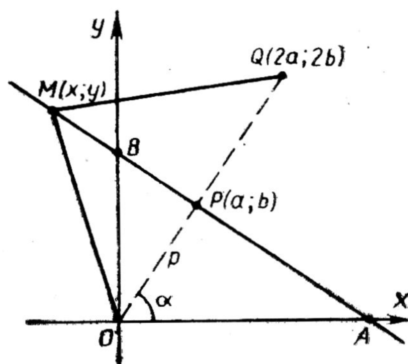
b) Raskite koordinates taško N, simetriško taškui B taško A atžvilgiu.

9. Rombo priešingos viršūnės yra taškuose $A(8, -3)$, $C(10, 11)$, o jo kraštinės ilgis lygus $|AB|=10$. Raskite kitų rombo viršūnių koordinates.

10. Apskaičiuokite trikampio ABC pusiaukraštinių ilgius, kai jo viršūnės yra taškuose $A(3, -2)$, $B(5, 2)$, $C(-1, 4)$.

3. Tiesės lygtis. Tiesės padėtį koordinačių plokštumoje galima apibrėžti įvairiais būdais.

Kai tiesė neina per koordinačių pradžią, tai jos padėtį galima apibrėžti koordinatėmis taško $P(a, b)$, kuriame tiesę kerta statmuo CP, nubrėžtas jai iš koordinačių pradžios. Iš



4 pav.

tikrųjų, norėdami nubrėžti tiesę l, turime sujungti taškus O ir P, po to iš taško P nubrėžti statmenį atkarpai OP (4 pav.).

Gausime lygtį tiesės l, einančios per tašką $P(a, b)$ statmenai atkarpai OP. Visų pirma atkreipsime dėmesį, kad taškas P yra atkarpose OQ vidurio taškas; čia $Q(2a, 2b)$. Todėl visi tiesės l taškai $M(x, y)$ vienodai nutolę nuo taškų O ir Q, ir, vadinasi, $|OM|^2=|MQ|^2$. Bet, remiantis (5) formule, turime

$$|OM|^2=x^2+y^2,\ |MQ|^2=(x-2a)^2+(y-2b)^2, \text{ todėl}$$

$$x^2+y^2=(x-2a)^2+(y-2b)^2. \qquad (7)$$

Be to, (7) lygybė negalioja nė vienam taškui, nesančiam tiesėje l, nes šiems taškams $|OM|\neq|MQ|$.

Vadinasi, (7) lygtis — tiesės l lygtis. Atskliautę skliaustus ir suprastinę, gauname lygtį

$$ax+by-(a^2+b^2)=0. \qquad (8)$$

Čia $a^2+b^2=p^2$, o p — atkarpos OP ilgis. Todėl (8) lygybę galima parašyti taip:

$$ax+by-p^2=0. \qquad (9)$$

Padauginę abi lygties puses iš skaičiaus, nelygaus nuliui, gauname lygtį, ekvivalenčią duotajai. Aišku, kad tokių lygčių grafikai vienodi. Todėl tiesę galima apibrėžti taip pat lygtimi

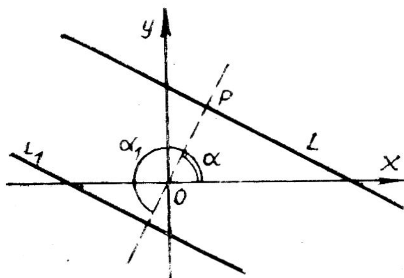
$$\frac{a}{p}x+\frac{b}{p}y-p=0, \qquad (9')$$

kuri gaunama iš (9) lygties, padauginus abi jos puses iš $\frac{1}{p}$. Iš trikampio OAP aišku, kad $\frac{a}{p}=\cos\alpha$, $\frac{b}{p}=\sin\alpha$; čia α — kampas, kurį sudaro teigiama abscisių ašies kryptis su spinduliu OP (kampas atskaičiuojamas prieš laikrodžio rodyklę). Todėl lygtį (9′) galima parašyti taip:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0. \qquad \mathbf{(10)}$$

Tokia lygtis vadinama *normaline tiesės lygtimi*.

Kai tiesės l ir l_1 lygiagrečios, jos statmenos tai pačiai tiesei OP, todėl kampai α ir α_1, atitinkantys šias tieses, lygūs arba skiriasi 180° (5 pav.).



5 pav.

Iki šiol manėme, kad tiesė l neina per koordinačių pradžią. Jei ji eina per tašką $O(0, 0)$, tai aišku, kad tuomet $p=0$, todėl (10) lygtis įgyja išraišką $x\cos\alpha+y\sin\alpha=0$; čia α — kampas tarp teigiamos abscisių ašies krypties ir statmens šiai tiesei.

Padauginę abi normalinės tiesės lygties puses iš skaičiaus

λ, nelygaus nuliui, ir pažymėję $\lambda \cos\alpha = A$, $\lambda \sin\alpha = B$, $-\lambda p = C$, gauname lygtį

$$Ax + By + C = 0. \qquad (11)$$

Kai tiesė eina per koordinačių pradžią, tai $C=0$. Skaičiai A, B, C apibrėžti nevienareikšmiai — tiesė apibrėžia ne pačius skaičius, o tik jų santykius $A : B : C$.

Taigi bet kurios tiesės lygtį galima parašyti (11) išraiška, todėl (11) lygtis vadinama *bendrąja tiesės lygtimi*. Antra vertus, bet kurią (11) išraiškos lygtį galima pakeisti (10) išraiškos lygtimi: reikia abi (11) lygties puses padauginti iš daugiklio N, su kuriuo $(NA)^2 + (NB)^2 = 1$, be to, N ir C turi būti priešingų ženklų.

Kai tiesės $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ir $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ yra lygiagrečios, tai, pakeitę šias lygtis (10) išraiškos lygtimis, gausime, kad sinusų ir kosinusų reikšmės bus arba lygios, arba skirsis tik ženklais. Iš to išplaukia, kad $A_1 = \mu A_2$, $B_1 = \mu B_2$, todėl $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$. Nesunku įrodyti ir atvirkščią teiginį: kai $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, tai tiesės lygiagrečios.

Mokykloje nagrinėjama tiesės lygtis $y = kx + b$. Taip galima užrašyti bendrąją tiesės lygtį, kai $B \neq 0$. Padaliję visus lygties $Ax + By + C = 0$ narius iš B ir pertvarkę, gauname

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Pažymėję $-\frac{A}{B} = k$, $-\frac{C}{B} = b$, gauname $y = kx + b$. Skaičius k vadinamas tiesės *krypties koeficientu*, o b — jos *pradine ordinate*. Nesunku įsitikinti, kad b lygus didumui atkarpos, kurią tiesė atkerta nuo ordinačių ašies. Lygiagrečių tiesių krypties koeficientai vienodi.

Kai $B = 0$, bet $A \neq 0$, tiesės lygtį galima parašyti taip: $x = -\frac{C}{A}$. Šios tiesės visų taškų abscisės yra vienodos, todėl tokia tiesė lygiagreti ordinačių ašiai. Atvirkščiai, bet kurios tiesės, lygiagrečios ordinačių ašiai, lygtis turi išraišką $x = a$.

Pratimai

11. Parinkite koeficientą λ taip, kad tiesės lygtis $Ax + By + C = 0$, padauginta iš λ, įgytų (10) išraišką. Nubrėžkite šią tiesę.

12. Raskite didumus atkarpų a ir b, kurias tiesė $Ax + By + C = 0$ atkerta koordinačių ašyse (A, B, $C \neq 0$). Įrodykite, kad tokios tiesės lygtį galima parašyti taip: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

13. Įrodykite, kad $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, kai tiesės $a_1x + b_1y - p_1^2 = 0$ ir $a_2x + b_2y - p_2^2 = 0$ lygiagrečios. Remdamiesi tuo, įrodykite, kad tie-

šių $A_1x+B_1y+C_1=0$ ir $A_2x+B_2y+C_2=0$ lygiagretumo sąlyga yra $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$. Įrodykite, kad lygiagrečių tiesių krypties koeficientai lygūs.

14. Parašykite lygtį tiesės, kurios visi taškai vienodai nutolę nuo taškų $M_1(1, 6)$ ir $M_2(-1, 4)$.

15. Raskite apskritimo, apibrėžto apie trikampį ABC, centro koordinates, kai $A(2, 4)$, $B(3, 7)$, $C(8, 2)$.

16. Įrodykite, kad tiesė $y-y_1=k(x-x_1)$ eina per tašką $M_1(x_1, y_1)$, kad ir koks būtų k.

17. Per tašką $M(6, -2)$ nubrėžkite tiesę[1], lygiagrečią tiesei $3x-y+7=0$.

18. Įrodykite, kad tiesės, einančios per taškus $M_1(x_1, y_1)$ ir $M_2(x_2, y_2)$ $(x_1 \neq x_2)$, krypties koeficientas

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

19. Įrodykite, kad tiesė

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

eina per taškus $M_1(x_1, y_1)$ ir $M_2(x_2, y_2)$.

20. Parašykite trikampio ABC kraštinių ir pusiaukraštinių lygtis, kai jo viršūnės yra taškuose $A(-5, 2)$, $B(3, 1)$, $C(0, -4)$.

21. Per trikampio ABC viršūnes $A(1, 3)$, $B(5, 2)$, $C(3, 0)$ nubrėžkite tieses, lygiagrečias priešingoms šio trikampio kraštinėms.

22. Įrodykite, kad taškų, kurių atstumų nuo taškų $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ kvadratų skirtumas lygus d^2, aibė yra tiesė.

23. Iš tam tikrų taškų apskritimams Γ_1 ir Γ_2 nubrėžtos vienodo ilgio liestinės. Raskite šių taškų aibę.

24. Įrodykite, kad tuo atveju, kai apskritimai Γ_1 ir Γ_2 susikerta, taškų aibė (23 uždavinys) yra tiesėje, einančioje per šių apskritimų susikirtimo taškus.

25. Nubraižyti trys poromis susikertantys apskritimai. Įrodykite, kad tiesės, kurioms priklauso jų bendros stygos, kertasi viename taške.

26. 6 paveiksle pavaizduota *tiesių $y=kx$ šeima;* čia parametras k gali įgyti bet kurias reikšmes. Aišku, nesugebėsime nubrėžti visų šių tiesių — nubrėžėme tik kai kurias jų; tačiau nesunku įsivaizduoti, kaip, kintant k nuo $-\infty$ iki $+\infty$, kinta („juda“) tiesė $y=kx$: ji sukasi taip, kaip rodo rodyklė 6 paveiksle. Panašiu būdu 7 paveiksle pavaizduota tiesių $y=x+l$ šeima, kai $-\infty<l<+\infty$. Tokiu pat būdu nubrėžkite šias tiesių šeimas:

a) $y=\frac{1}{2}x+l$, $-\infty<l<+\infty$;

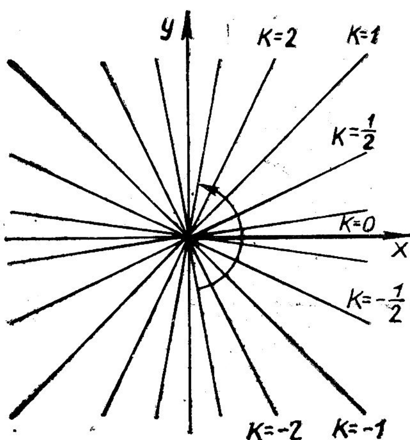
[1] T. y. parašykite šios tiesės lygtį. Toliau geometrinius brėžimo uždavinius nagrinėsime išreikštus algebriškai.

b) $y=kx+2$, $-\infty<k<+\infty$;

c) $y=k(x-1)$, $-\infty<k<+\infty$;

d) $y=k(x+1)$, $-\infty<k<+\infty$;

e) $y=k(x-k)$, $-\infty<k<+\infty$.

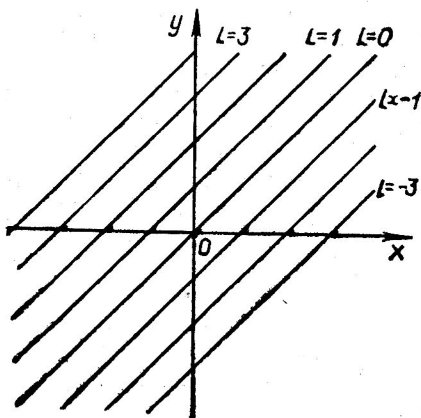


6 pav.

4. Apskritimo lygtis. Nubrėžkime apskritimą Γ, kurio centras taške $A(a, b)$ ir spindulys lygus r (8 pav.). Kad ir koks būtų šio apskritimo taškas $M(x, y)$, turime $|AM|=r$, arba $|AM|^2=r^2$. Remdamiesi (5) formule, gauname $|AM|^2=(x-a)^2+(y-b)^2$. Vadinasi, visiems apskritimo Γ taškams $M(x, y)$ turi galioti lygybė

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \qquad (12)$$

O jei koks nors taškas $N(x, y)$ nepriklauso apskritimui, tai jam $|AN|^2\neq r^2$, todėl (12) lygybė negalioja.



7 pav.

Taigi apskritimas yra aibė koordinačių plokštumos taškų $M(x, y)$, tenkinančių (12) lygybę. Todėl ši lygybė — *apskritimo Γ lygtis*, o apskritimas — (12) *lygties grafikas.*

Atskliautę (12) lygtyje skliaustus ir r^2 perkėlę į kairiąją lygties pusę su priešingu ženklu, gauname lygtį

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0, \qquad (13)$$

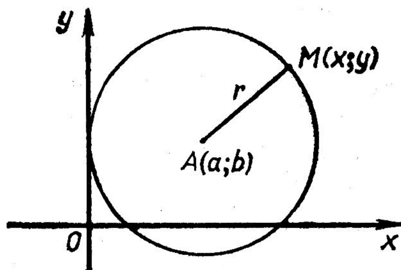
čia $c=a^2+b^2-r^2$.

Tarkime atvirkščiai, duota bet kokia (13) išraiškos lygtis. Išskyrę dvinario kvadratus, gauname lygtį

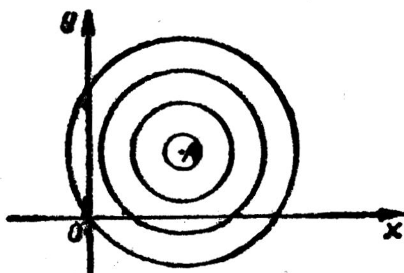
$$(x^2-2ax+a^2)+(y^2-2by+b^2)=$$
$$=a^2+b^2-c,$$

t. y.

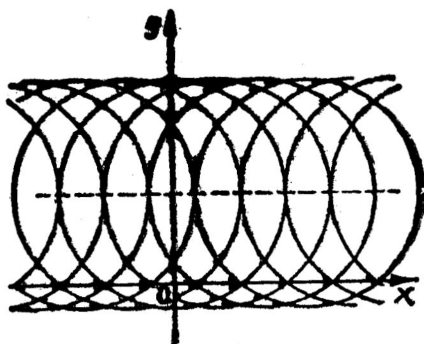
$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2-c.$$



8 pav.



9 pav.



10 pav.

Kai $a^2+b^2-c>0$, tai yra vienintelis teigiamas skaičius r, kuriam $a^2+b^2-c=r^2$. Tokiu atveju (13) lygtis apibrėžia apskritimą, kurio centras $A(a, b)$ ir spindulys r.

Kai $a^2+b^2-c=0$, gauname $(x-a)^2+(y-b)^2=0$. Šiai lygčiai tinka vienintelis taškas $A(a, b)$ („nulinio" spindulio apskritimo, kurio centras A).

Pagaliau, kai $a^2+b^2-c<0$, nėra nė vieno koordinačių plokštumos taško, kurio koordinatės tiktų (13) lygčiai. Tokiu atveju (13) lygtis apibrėžia tuščią aibę.

(13) apskritimo lygtyje yra skaičiai a, b, r, apibūdinantys šio apskritimo centro padėtį ir jo spindulio ilgį. Šie skaičiai vadinami apskritimo *parametrais*. Sakoma, kad visų plokštumos apskritimų aibė yra triparametrė.

Jei du parametrus fiksuotume, o keistume trečiąjį, gautume begalinę šeimą apskritimų, priklausančių nuo vieno parametro. Pavyzdžiui, keisdami spindulį r, gauname koncentrinių apskritimų šeimą (9 pav.). Keisdami parametrą a, gauname šeimą r spindulio apskritimų, kurių centrai yra tiesėje, lygiagrečioje abscisių ašiai (10 pav.).

Pratimai

27. Apskritimas, kurio centras $C(1, 1)$, eina per koordinačių pradžią. Parašykite jo lygtį.

28. Ištirkite, kurias aibes apibrėžia lygtys:

a) $x^2+2x+y^2=0$;
b) $x^2+2x+y^2=3$;
c) $x^2+2x+y^2+1=0$;
d) $x^2+2x+y^2+3=0$.

29. Nubrėžkite apskritimų šeimas:

a) $(x-a)^2+y^2=a^2$;

b) $x^2+(y-a)^2=a^2$;
c) $(x-a)^2+(y-b)^2=2a^2$.

30. Apibrėžkite visų apskritimų, einančių per taškus $A(-1, 0)$ ir $B(1, 0)$, šeimą viena lygtimi, priklausančia nuo parametro a, lygaus centro C ordinatei.

31. a) Įrodykite, kad funkcijos $y=\sqrt{r^2-x^2}$ grafikas yra pusapskritimis (apskritimo dalis, esanti kurioje nors vienoje jo skersmens pusėje).

b) Įrodykite, kad funkcijos $y=\sqrt{q+px-x^2}$ grafikas, kai $p^2+ +4q>0$, yra pusapskritimis.

32. Raskite apskritimo, apibrėžto apie trikampį, lygtį, kai trikampio viršūnės yra taškuose:

a) $A(7, 7)$, $B(0, 8)$, $C(-2, 4)$;
b) $A(0, 4)$, $B(1, 2)$, $C(3, -2)$.

33. Parašykite apskritimo lygtį, kai jis liečia abi koordinačių ašis ir eina per tašką $A(2, 9)$.

34. Įrodykite, kad taškų aibė, kurios kiekvieno taško atstumų iki taškų $A(-a, 0)$ ir $B(a, 0)$ kvadratų suma pastovi ir lygi $4a^2$, yra apskritimas.

35. Įrodykite, kad taškų aibė, kurios kiekvieno taško atstumų iki taškų $A(-a, 0)$ ir $B(a, 0)$ santykis lygus $\lambda\neq1$, yra apskritimas (šis apskritimas vadinamas *Apolonijo apskritimu, einančiu per taškus* A ir B (Apolonijas — senovės graikų matematikas, pirmasis įrodęs atitinkamą teoremą). Kokia šios aibės išraiška, kai $\lambda=1$?

36. Apolonijo apskritimo spindulį, jo centro abscisę, taip pat taškų, kuriuose šis apskritimas kerta abscisių ašį, koordinates išreikškite dydžiais a ir λ.

37. Imdami įvairias λ reikšmes, nubraižykite Apolonijo apskritimų, einančių per taškus $A(-a, 0)$ ir $B(a, 0)$, šeimą. Ką galima pasakyti apie Apolonijo apskritimus, kai λ artėja prie 1?

38. Įrodykite, kad Apolonijo apskritimai, einantys per duotuosius taškus A ir B, poromis nesikerta, o jų centrai nepriklauso atkarpai AB.

39. Ištirkite, kuo tampa Apolonijo apskritimas, kai λ artėja prie nulio ir kai λ artėja prie begalybės.

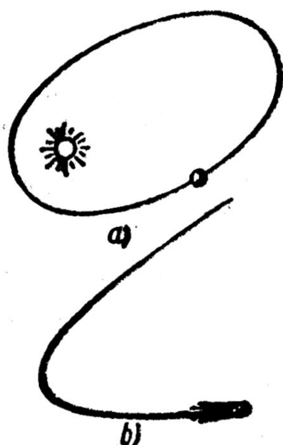
40. a) Taikydami koordinačių metodą, įrodykite, kad, kai pakankamai didelės reikšmės, taškų aibė

$$\{M/|MA|^2+|MB|^2+|MC|^2=a^2\},$$

kai A, B, C — duotieji taškai, yra apskritimas. (Spręsdami šį uždavinį, koordinačių sistemą galite pasirinkti laisvai.)

b)* Taškai A, B, C — trikampio ABC viršūnės. Pagal šių taškų koordinates, keisdami d reikšmę, apibrėžtą a) uždavinyje, raskite taško D koordinates, kai atstumų nuo jo iki taškų A, B, C kvadratų suma minimaliausia.

c) Įrodykite, kad taškas D iš b) uždavinio yra trikampio ABC pusiaukraštinių susikirtimo taškas.



11 pav.

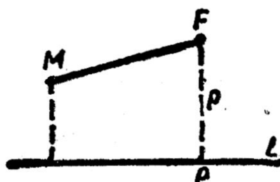
5. Elipsė, hiperbolė, parabolė. Iš astronomijos žinome, kad planetos juda kreivėmis, vadinamomis elipsėmis, kurios panašios į ištemptus apskritimus (11 pav., *a*). O kometos gali judėti tiek labai ištemptomis į ilgį elipsėmis, tiek parabolėmis, tiek ir hiperbolėmis (11 pav., *b*) (kai kometos juda parabolėmis arba hiperbolėmis, tai jos, pasirodžiusios Saulės aplinkoje, nuskrieja į tarpžvaigždines erdves ir daugiau prie Saulės nebegrįžta). Tai, jog kometos gali judėti trijomis skirtingomis kreivėmis, liudija, kad jos — elipsė, hiperbolė ir parabolė — turi turėti bendrų savybių, nors jos savo išore ir skiriasi. Iš tikrųjų visas tris kreives galima apibūdinti ta pačia geometrine savybe.

Nubrėžkime tiesę l ir pažymėkime tašką F, nutolusį nuo tiesės l atstumu $p>0$ (12 pav.). Rasime kreivės Γ lygtį, kai kiekvieno jos taško atstumų iki taško F ir iki tiesės l santykis yra pastovus ir lygus ε.

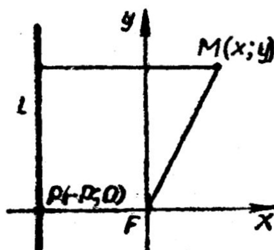
Ieškomosios kreivės forma skirtinga ir priklauso nuo ε. Kai $0<\varepsilon<1$, gaunama *elipsė,* kai $\varepsilon=1$, — *parabolė,* o kai $\varepsilon>1$ — *hiperbolė.* Skaičius ε vadinamas kreivės Γ *ekscentricitetu,* taškas F — jos *židiniu,* o l — *direktrise.*

Tiesę FP, einančią per tašką F ir statmeną tiesei l, laikykime abscisių ašimi, o tašką F — koordinačių pradžia. Abscisių ašies kryptį parinkime nuo P į F (13 pav.). Tarkime, $M(x, y)$ — bet kuris kreivės Γ taškas. Jo atstumas iki taško F lygus $\sqrt{x^2+y^2}$, o atstumas iki tiesės l lygus $|p+x|$. Pagal sąlygą

$$\sqrt{x^2+y^2}=\varepsilon|p+x|.$$



12 pav.



13 pav.

Prastindami šią lygtį, abi jos puses pakeliame kvadratu, turėdami galvoje, kad $|a^2|=a^2$. Po nesudėtingų pertvarkymų gauname tokią lygtį:

$$(1-\varepsilon^2)x^2-2\varepsilon^2px+y^2=\varepsilon^2p^2. \quad (14)$$

Kai $\varepsilon=1$, ji įgyja išraišką

$$-2px+y^2=p^2,$$

t. y.

$$y^2=2p\left(\frac{p}{2}+x\right). \quad (15)$$

Gavome parabolės lygtį.

Kai $\varepsilon\neq 1$, padaliję abi (14) lygties puses iš $1-\varepsilon^2$, išskiriame dvinario kvadratą. Po nesudėtingų pertvarkymų gauname lygtį

$$\left(x-\frac{\varepsilon^2p}{1-\varepsilon^2}\right)^2+\frac{y^2}{1-\varepsilon^2}=\frac{\varepsilon^2p^2}{(1-\varepsilon^2)^2}.$$

Pažymėkime:

$$\frac{\varepsilon^2p}{|1-\varepsilon^2|}=c, \quad \frac{\varepsilon p}{|1-\varepsilon^2|}=a, \quad \frac{\varepsilon p}{\sqrt{|1-\varepsilon^2|}}=b.$$

Kadangi $|1-\varepsilon^2|=1-\varepsilon^2$, kai $0<\varepsilon<1$, lygtį galima parašyti taip:

$$\frac{(x-c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \quad (16)$$

Tai elipsės lygtis.

Kai $\varepsilon>1$, tai $|1-\varepsilon^2|=-(1-\varepsilon^2)$, todėl lygtis atrodo taip:

$$\frac{(x+c)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \quad (17)$$

Tai hiperbolės lygtis.

Vėliau suprastinsime šias lygtis ir ištirsime kreivių, apibrėžiamų šiomis lygtimis, formą.

Pratimai

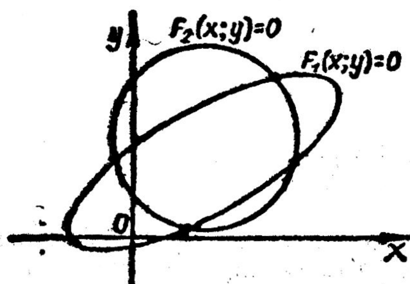
41. Įrodykite, kad elipsei $a^2=b^2+c^2$, o hiperbolei $c^2=a^2+b^2$.

42. Per elipsės židinį nubrėžta tiesė, lygiagreti jos direktrisei. Atkarpos, kurią elipsė iškerta joje, ilgį išreikškite dydžiais ε ir p.

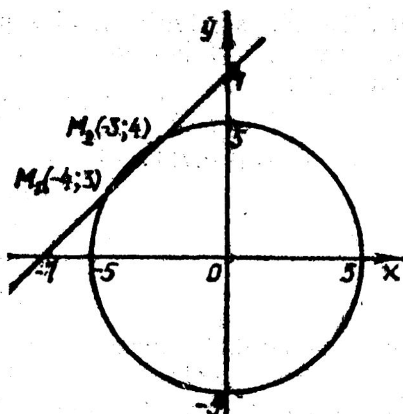
43. Dydžius p ir ε, kuriais apibrėžta elipsė, išreikškite dydžiais a ir b. Padarykite tą patį hiperbolei.

44. Dydžius a ir b, apibūdinančius elipsę, išreikškite dydžiais c ir ε.

6. Grafikų sankirta. Tarkime, kad kreivės Γ_1 ir Γ_2 yra apibrėžtos atitinkamai lygtimis $F_1(x, y)=0$ ir $F_2(x, y)=0$. Jei taškas $M(a, b)$ priklauso šių kreivių sankirtai, tai jo koordinatės a ir b



14 pav.



15 pav.

tinka abiem lygtims. Todėl, norint rasti šių kreivių susikirtimo taškus (14 pav.), pakanka išspręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} F_1(x, y)=0, \\ F_2(x, y)=0. \end{cases}$$

P a v y z d y s. Raskime tiesės $x-y+7=0$ ir apskritimo x^2+ $+y^2=25$ susikirtimo taškus (15 pav.).

Spręsdami šį uždavinį, turime rasti lygčių sistemos

$$\begin{cases} x-y+7=0, \\ x^2+y^2=25. \end{cases}$$

sprendinius. Į apskritimo lygtį įrašę x reikšmę iš tiesės lygties, gauname kvadratinę lygtį $(y-7)^2+y^2=25$, arba $2y^2-14y+24=0$, t. y. $y^2-7y+12=0$. Išsprendę ją, gauname dvi šaknis $y_1=3$ ir $y_2=4$. Jas atitinka reikšmės $x_1=-4$ ir $x_2=-3$. Vadinasi, tiesė ir apskritimas turi du susikirtimo taškus $M_1(-4, 3)$ ir $M_2(-3, 4)$.

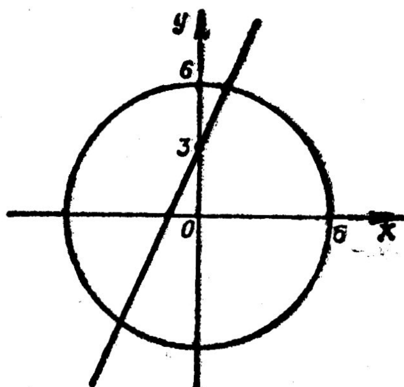
Pratimai

45. Raskite susikirtimo taškus kreivių, apibrėžtų šiomis lygtimis:

a) $x+y=9$ ir $xy=14$;
b) $x^2+y^2=169$ ir $x^2-y^2=119$;
c) $x^2+y^2=29$ ir $xy=10$;
d) $x^2+y^2=25$ ir $x-y=1$;
e) $x^2-3xy+2y^2=0$ ir $x+4y=5$.

7. Grafikų sąjunga. Tarkime, norime nubraižyti lygties $(2x-$ $-y+3)(x^2+y^2-36)=0$ grafiką. Visų pirma priminsime, kad dviejų skaičių sandauga lygi nuliui tada ir tik tada, kai bent vienas

dauginamųjų lygus nuliui. Todėl taškas M gali priklausyti šios lygties grafikui tada ir tik tada, kai jo koordinatės tenkina bent vieną lygčių $2x-y+3=0$ ir $x^2+y^2-36=0$. Bet pirmuoju atveju šis taškas yra tiesės taškas, o antruoju — apskritimo. Vadinasi, duotosios lygties grafikas yra tiesės $2x-y+3=0$ ir apskritimo $x^2+y^2-36=0$ sąjunga (16 pav.).



16 pav.

Apskritai, kai lygtis turi išraišką

$$F_1(x, y) \cdot F_2(x, y) \ldots F_n(x, y) = 0,$$

o funkcijos F_k (čia $1 \leqslant k \leqslant n$) įgyja reikšmes su bet kokiomis x ir y reikšmėmis, šios lygties grafikas yra lygčių $F_1(x, y)=0, \ldots, F_n(x, y)=0$ grafikų sąjunga.

Pavyzdys. Parašykime lygtį, kurią tenkintų tik apskritimo, turinčio centrą $A(-2, 5)$ ir spindulį 3, taškai bei pats taškas A.

Apskritimo lygtis tokia: $(x+2)^2+(y-5)^2=9$. O lygties, kuriai tinka tik taškas A, išraiška gali būti ir tokia: $(x+2)^2+(y-5)^2=0$. Todėl vienas atsakymas toks:

$$((x+2)^2+(y-5)^2-9)((x+2)^2+(y-5)^2)=0.$$

Pratimai

46. Nubraižykite grafikus lygčių:

a) $x^2-y^2=0$;
b) $xy=0$;
c) $(x+y-1)(x^2+y^2-49)=0$;
d) $(x^2+y^2)((x-1)^2+(y-1)^2)((x+4)^2+(y-5)^2)=0$;
e) $x^2-3xy+2y^2=0$;
f) $x^2-4xy+3y^2=0$;
g) $x^2y^2=1$;
h) $x^2y^2-x^2-y^2+1=0$;
i) $(x^2+y^2-1)(x^2-1)(y^2-1)=0$.

47. Kokia turi būti sąlyga, kad lygties

$$x^2-y^2+2Ax+2By+C=0$$

grafikas būtų dviejų tiesių visuma?

48. Kvadrato viršūnės yra taškuose $A(0, 0)$, $B(0, 2)$, $C(2, 2)$, $D(2, 0)$. Parašykite lygtį, kurios grafikas yra šio kvadrato kontūras.

8. **Nelygybių grafikai.** Kiekviena kreivė Γ dalija plokštumą į keletą jungiųjų dalių; taip vadinamos dalys, kurių bet kuriuos du taškus galima sujungti laužte, nekertančia kreivės Γ, o laužtė, jungianti skirtingų dalių taškus, kerta kreivę Γ. Pavyzdžiui, tiesė dalija plokštumą į dvi pusplokštumes, apskritimas išskaido plokštumą į atvirą skritulį ir išorinę sritį ir t. t. Gali būti taip, kad yra tik viena jungioji sritis, pavyzdžiui, kai Γ yra atkarpa.

Tarkime, kad kreivė Γ, kurios lygtis $F(x, y)=0$, išskaido plokštumą į jungiąsias dalis $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$. Tuomet kiekvienoje tokioje dalyje funkcija $F(x, y)$ nekeičia ženklo. Pateikiame šį teiginį be įrodymo, nes, norint griežtai jį įrodyti, reikia žinių, neįeinančių į aštuonmetės mokyklos matematikos kursą.

Nelygybės $F(x, y)>0$ ***grafiku*** pavadinsime aibę Ω taškų $A(a, b)$, su kuriais yra teisinga skaitinė nelygybė $F(a, b)>0$. Norėdami gauti nelygybės $F(a, y)>0$ grafiką, turime nubrėžti kreivę Γ, kurios lygtis $F(x, y)=0$, kiekvienoje dalyje $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$, į kurias ši kreivė suskaido plokštumą, turime parinkti po tašką $A_1, \ldots, A_n$ ir rasti funkcijos $F(x, y)$ ženklą šiuose taškuose. Tuomet funkcijos $F(x, y)$ ženklas dalyje Ω_k bus toks pat, koks ir taške A_k. Paėmę dalių, kuriose $F(x, y)$ yra teigiama sąjunga, gausime ieškomąjį grafiką.

1 pavyzdys. Nubraižykite nelygybės

$$(x+y-6)(x^2+y^2-64)>0 \tag{18}$$

grafiką.

Iš pradžių rasime lygties

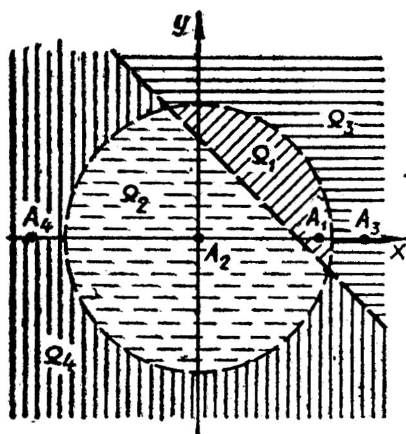
$$(x+y-6)(x^2+y^2-64)=0$$

grafiką. Kadangi kairioji šios lygties dalis yra dviejų funkcijų sandauga, tai jos grafikas sudarytas iš dviejų kreivių: tiesės $x+y-6=0$ ir apskritimo $x^2+y^2=64$. Šios kreivės dalija plokštumą į keturias sritis (17 pav.). Parinkime srityje Ω_1 tašką A_1 (7, 0), srityje Ω_2 — tašką $A_2(0, 0)$, srityje Ω_3 — tašką $A_3(9, 0)$ ir srityje Ω_4 — tašką $A_4(-9, 0)$. Įrašę šių taškų koordinates į reiškinį $(x+y-6)(x^2+y^2-64)$, įsitikiname, kad taškuose A_2 ir A_3 jis yra teigiamas, o taškuose A_1 ir A_4 — neigiamas. Todėl jis bus teigiamas srityse Ω_2 bei Ω_3 ir neigiamas kitose dviejose srityse. Taigi nelygybės grafiką (17 pav.) sudaro sritys Ω_2 ir Ω_3 (kadangi nelygybė griežta, tai tiesės ir apskritimo taškai grafikui nepriklauso, todėl jie paveiksle pavaizduoti brūkšneliais; jei (18) nelygybėje ženklą $>$ pakeistume ženklu $\geqslant$, turėtume prie grafiko prijungti ir minėtųjų kreivių taškus).

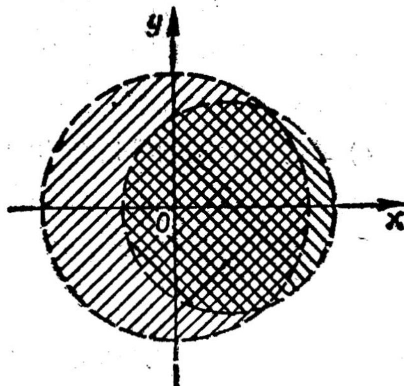
Imdami sričių, apibrėžtų nelygybėmis $F(x, y)\gtreqless 0$, sąjungą ir sankirtą, galėsime gauti labai įvairių sričių.

2 pavyzdys. Raskite sritį, apibrėžtą nelygybių sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2-25<0, \\ (x-2)^2+y^2-16<0. \end{cases}$$



17 pav.



18 pav.

Kiekviena šios sistemos nelygybė apibrėžia atvirą skritulį. Pirmojo centras yra taške $O(0, 0)$, o spindulys lygus 5, antrojo centras yra taške $A(2, 0)$, o spindulys lygus 4. Taškai, kurių koordinatės tenkina abi nelygybes, priklauso abiem skrituliams, t. y. jų sankirtai. Vadinasi, sistema apibrėžia sritį, kuri 18 paveiksle subrūkšniuota du kartus.

3 pavyzdys. Raskite sritį, apibrėžtą sąlyga

$$x^2+y^2-25<0 \text{ arba } (x-2)^2+y^2-16<0$$

(čia jungtis „arba" suprantama neskiriamąja prasme — taškų koordinatės turi tenkinti bent vieną šių nelygybių, bet gali tenkinti ir abi nelygybes kartu).

Iš sąlygos aišku, kad ieškomoji sritis yra skritulių, nubrėžtų 2 pavyzdyje, sąjunga (18 pav.).

Pratimai

49. Nubraižykite sritis, apibrėžtas nelygybėmis:

a) $y \geqslant 4x-6$;
b) $(x-2)^2+(y+3)^2 \leqslant 25$;
c) $y \leqslant x^2+1$;
d) $(x-2)^2+(y+3)^2>25$.

50. Raskite $A \cap B$ ir $A \cup B$, kai:

a) $A=\{M(x, y) \mid y<9-x^2\}$,
$B=\{M(x, y) \mid y \geqslant x^2\}$;
b) $A=\{M(x, y) \mid x^2+y^2 \leqslant 25\}$,
$B=\{M(x, y) \mid x+y \geqslant -1\}$;

c) $A=\{M(x, y) | x^2+y^2 \leqslant 25\}$,
$B=\{M(x, y) | y > x^2\}$;

d) $A=\{M(x, y) | y=\frac{1}{2}x^2\}$,
$B=\{M(x, y) | y \geqslant \frac{3}{2}x-1\}$;

e) $A=\{M(x, y) | x^2+y^2-2x+4y-29 \leqslant 0\}$,
$B=\{M(x, y) | 2x+y=1\}$;

f) $A=\{M(x, y) | x^2+y^2 \geqslant 25\}$,
$B=\{M(x, y) | y=\frac{4}{9}x^2\}$.

GRAFIKAI IR GEOMETRINĖS TRANSFORMACIJOS

1. Geometrinių transformacijų reiškimas koordinatėmis. Prisiminsime, kad *geometrine transformacija* vadinamas bet koks abipusiškai vienareikšmis plokštumos atvaizdis į ją pačią. Tarkime, kad plokštumoje yra parinkta koordinačių sistema ir f — tam tikra geometrinė transformacija. Tuomet taško $N=f(M)$ koordinatės (x', y') yra taško M koordinačių (x, y) funkcijos:

$$\begin{cases} x'=\varphi(x, y), \\ y'=\psi(x, y). \end{cases} \tag{1}$$

Funkcijos $\varphi(x, y)$ ir $\psi(x, y)$ visiškai apibrėžia transformaciją f.

1 pavyzdys. Tarkime, f — lygiagretusis postūmis, kuriuo koordinačių pradžia $O(0, 0)$ atvaizduojama į taškus $A(a, b)$. Rasime taško $M(x, y)$ vaizdo $N(x', y')$, gauto šiuo postūmiu, koordinates. Suprojektuokime taškus A, M ir N į abscisių ašį (19 pav.). Kadangi atkarpos OA ir MN yra lygiagrečios ir vienodo ilgio, tai kryptinių atkarpų OA' ir $M'N'$ didumai bus vienodi, $|OA'|=|M'N'|$. Aišku, kad

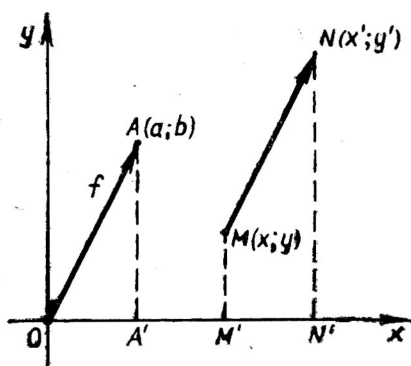
$$|ON'|=|OM'|+|M'N'|=|OM'|+|OA'|.$$

Kadangi $|ON'|=x'$, $|OM'|=x$, $|OA'|=a$, gauname, kad $x'=x+a$. Analogiškai įrodoma lygybė $y'=y+b$. Vadinasi, lygiagretusis postūmis koordinatėmis reiškiamas taip:

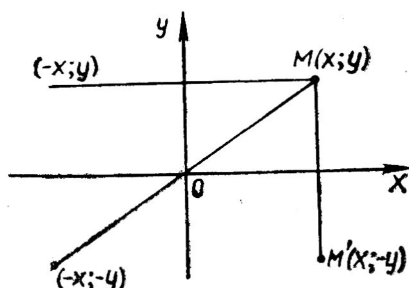
$$\begin{cases} x'=x+a, \\ y'=y+b. \end{cases} \tag{2}$$

2 pavyzdys. Tarkime, kad f — ašinė simetrija abscisių ašies atžvilgiu. 20 paveiksle matyti, kad šia transformacija taškas $M(x, y)$ atvaizduojamas į tašką $M'(x, -y)$. Vadinasi, ši transformacija koordinatėmis reiškiama taip:

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=-y. \end{cases} \tag{3}$$



19 pav.



20 pav.

Analogiškai įsitikintume, kad ašinė simetrija ordinačių ašies atžvilgiu apibrėžiama formulėmis

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = y, \end{cases} \tag{4}$$

o centrinė simetrija koordinačių pradžios atžvilgiu — formulėmis

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y. \end{cases} \tag{5}$$

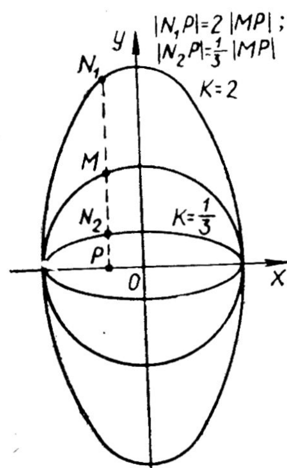
3 pavyzdys. Simetrija atžvilgiu tiesės $y=x$, dalijančios pusiau 1-ąjį ir 3-ąjį ketvirčius, koordinačių ašis sukeičia vietomis. Iš to aišku, kad šia transformacija taškas $M(x, y)$ bus atvaizduojamas į tašką $N(y, x)$. Todėl apibrėžiama formulėmis

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x. \end{cases} \tag{6}$$

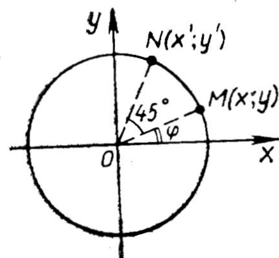
Analogiškai įsitikintume, kad simetrija atžvilgiu tiesės $y = -x$, dalijančios pusiau 2-ąjį ir 4-ąjį ketvirtį, taškas $M(x, y)$ bus atvaizduojamas į tašką $N_1(-y, -x)$, t. y. ši transformacija yra apibrėžiama formulėmis

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = -x. \end{cases} \tag{7}$$

4 pavyzdys. *Ištempimu,* kurio koeficientas $k>0$, *nuo tiesės* l pavadinsime geometrinę transformaciją, kuria šios tiesės taškai atvaizduojami į tuos pačius taškus, o kiekvienas taškas M, nepriklausantis l, atvaizduojamas į tašką N taip, kad $(MN) \perp l$ ir $|NP| = k|MP|$, čia P — tiesių MN ir l susikirtimo taškas. Iš šio apibrėžimo išplaukia, kad ištempimu abscisių ašies atžvilgiu (21 pav.), kai jo koeficientas lygus k, taškas $M(x, y)$ yra atvaiz-



21 pav.



22 pav.

duojamas į tašką $N(x, ky)$. Vadinasi, šis ištempimas apibrėžiamas formulėmis

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=ky. \end{cases} \tag{8}$$

Dar pridursime, kad tuo atveju, kai $0<k<1$, taškas N yra arčiau abscisių ašies negu taškas M, taigi šį kartą transformaciją būtų natūraliau vadinti ne ištempimu, o suspaudimu. Tačiau, siekdami terminologijos vieningumo, vartosime tik terminą „ištempimas".

Analogiškai įrodytume, kad ištempimas ordinačių ašies atžvilgiu, kai jo koeficientas lygus $k>0$, apibrėžiamas formulėmis

$$\begin{cases} x'=kx, \\ y'=y. \end{cases} \tag{8'}$$

5 p a v y z d y s. Jei iš pradžių atliktume ištempimą, kurio koeficientas k, abscisių ašies atžvilgiu, o paskui ištempimą, kurio koeficientas toks pat, ordinačių ašies atžvilgiu, gautume transformaciją, apibrėžiamą formulėmis

$$\begin{cases} x'=kx, \\ y'=ky. \end{cases} \tag{9}$$

Ši transformacija yra homotetija, kurios koeficientas k, koordinačių pradžios atžvilgiu.

6 p a v y z d y s. Išnagrinėkime posūkį 90° kampu prieš laikrodžio rodyklės kryptį apie koordinačių pradžią. Tarkime, kad šiuo posūkiu taškas $M(x, y)$ atvaizduojamas į tašką $N(x', y')$. Nesunku gauti, kad

$$\begin{cases} x'=-y, \\ y'=x. \end{cases} \tag{10}$$

Šios formulės yra formulių

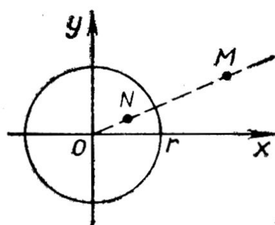
$$\begin{cases} x'=x\cos\varphi-y\sin\varphi \\ y'=x\sin\varphi+y\cos\varphi \end{cases} \tag{11}$$

atskiras atvejis. Pastarosios formulės apibrėžia posūkį kampu φ apie koordinačių pradžią (kampas atskaitomas prieš laikrodžio rodyklę). Pavyzdžiui, posūkis 45° kampu apie koordinačių pradžią (22 pav.) apibrėžiamas formulėmis

$$x'=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y,$$

$$y'=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y.$$

7 pavyzdys. *Inversija* atžvilgiu apskritimo Γ, kurio spindulys r ir centras O, vadinamas „pradurtos“ plokštumos (t. y. plokštumos, iš kurios pašalintas taškas O) geometrinė transformacija, kuria kiekvienas taškas M atvaizduojamas į tašką N taip, kad N yra spindulyje OM ir $|OM|\cdot|ON|=r^2$.



23 pav.

Parinkime koordinačių sistemą, kurios pradžia taške O. Kadangi taškai $O(0, 0)$, $M(x, y)$ ir $N(x', y')$ (23 pav.) yra viename spindulyje, tai $x'=kx$, $y'=ky$; čia $k>0$. Norėdami rasti k reikšmę, remkimės tuo, kad $|OM|^2=x^2+y^2$, $|ON|^2=(x')^2+(y')^2=k^2(x^2+y^2)$. Bet $|OM|^2\cdot|ON|^2=r^4$, todėl $k^2(x^2+y^2)=r^4$. Kadangi $k>0$, tai $k=\frac{r^2}{x^2+y^2}$. Vadinasi,

$$x'=kx=\frac{r^2x}{x^2+y^2},\quad y'=ky=\frac{r^2y}{x^2+y^2}.$$

Įrodėme, kad inversija atžvilgiu apskritimo, kurio centras koordinačių pradžioje ir spindulys r, apibrėžiama formulėmis

$$\begin{cases} x'=\dfrac{r^2x}{x^2+y^2}, \\ y'=\dfrac{r^2y}{x^2+y^2}. \end{cases} \tag{12}$$

Pavyzdžiui, kai $r=2$, taškas $M(3;\ 4)$ atvaizduojamas į tašką $N(0{,}48;\ 0{,}64)$, nes

$$\begin{cases} x'=\dfrac{2^2\cdot 3}{3^2+4^2}=\dfrac{12}{25}=0{,}48, \\ y'=\dfrac{2^2\cdot 4}{3^2+4^2}=\dfrac{16}{25}=0{,}64. \end{cases}$$

Pratimai

51. Įrodykite, kad transformacija, atvirkštinė inversijai, yra ta pati inversija.

52. Nuosekliai atliekamos transformacijos: posūkis 90° kampu apie koordinačių pradžią, po to homotetija, kurios koeficientas 4, koordinačių pradžios atžvilgiu ir, pagaliau, lygiagretusis postūmis, kuriuo koordinačių pradžia atvaizduojama į tašką $O_1(3, -4)$. Raskite taškų $A(5;\ -2)$ ir $B(0;\ 8)$ vaizdus, gautus šiomis transformacijomis. Raskite atkarpos AB vaizdą.

53. Formulės

$$\begin{cases} x'=x^2-y^2, \\ y'=2xy \end{cases}$$

apibrėžia viršutinės pusplokštumės atvaizdį į plokštumą, perpjautą išilgai teigiamo abscisių ašies spindulio. Parašykite atvirkštinio atvaizdžio formules.

54. Atvaizdžiai f ir g apibrėžiami formulėmis:

$$f: \begin{cases} x'=x+y, \\ y'=x-y; \end{cases} \qquad g: \begin{cases} x'=x^3-y^3, \\ y'=3xy^2-3x^2y. \end{cases}$$

Parašykite formules, apibrėžiančias atvaizdžius $f \circ g$ ir $g \circ f$. Ar galima sukeisti atvaizdžius f ir g vietomis, t. y. ar sutampa atvaizdžiai $f \circ g$ ir $g \circ f$?

2*. Kreivės vaizdo lygtis. Geometrine transformacija f kiekviena plokštumos taškų aibė Γ atvaizduojama aibėje $\Gamma'=f(\Gamma)$, sudarytoje iš aibės Γ taškų vaizdų. Aibė Γ' vadinama aibės Γ *vaizdu*, gautu transformacija f, o Γ — aibės Γ' *pirmvaizdžiu*. Kai aibė Γ yra lygties $F(x, y)=0$ grafikas, o transformacija f išreikšta koordinatėmis, galima parašyti aibės Γ vaizdo Γ' lygtį.

Iš pradžių, prieš nagrinėdami bendrą atvejį, išnagrinėkime pavyzdį. Tarkime, transformacija f apibrėžta formulėmis

$$\begin{cases} x'=2x-3y, \\ y'=x+2y. \end{cases} \qquad (13)$$

Rasime kreivės $\Gamma(x^2+3y^2=1)$ vaizdą, gautą šia transformacija. Paimkime kokį nors kreivės $\Gamma'=f(\Gamma)$ tašką $M'(x', y')$. Kadangi $M' \in f(\Gamma)$, tai jį atitiks kreivės Γ taškas $M(x, y)$ ir toks, kad $M'= =f(M)$. Norėdami surasti šio taško koordinates, turime išspręsti (13) lygčių sistemą atžvilgiu x ir y. Išsprendę ją, gauname

$$\begin{cases} x=\frac{2}{7}x'+\frac{3}{7}y', \\ y=-\frac{1}{7}x'+\frac{2}{7}y'. \end{cases} \qquad (14)$$

Bet taškas $M(x, y)$ priklauso kreivei Γ, todėl jo koordinatės tenkina šios kreivės lygtį. Vadinasi, taško M' koordinatės (x', y') tinka lygčiai

$$\left(\frac{2}{7}x'+\frac{3}{7}y'\right)^2+3\left(-\frac{1}{7}x'+\frac{2}{7}y'\right)^2=1, \qquad (15)$$

kuri gaunama iš Γ lygties, pakeitus joje koordinates x ir y jų išraiškomis iš (14) sistemos.

Taigi įrodėme, kad bet kurio kreivės Γ' taško (x', y') koordinatės tinka (15) lygčiai. Be to, aišku, kad bet kuris taškas $M'(x', y')$, kurio koordinatės tinka (15) lygčiai, priklauso Γ'. Kitaip tariant, Γ' yra (15) lygties grafikas. Paprastai kintamieji x' ir y' tokioje lygtyje pakeičiami raidėmis x ir y:

$$\left(\frac{2}{7}x+\frac{3}{7}y\right)^2+3\left(-\frac{1}{7}x+\frac{2}{7}y\right)^2=1. \qquad (15')$$

Šis pavyzdys rodo, kad kreivės $\Gamma'=f(\Gamma)$ lygtis gaunama tokiu būdu:

1) lygtys, apibrėžiančios transformaciją f, sprendžiamos x ir y atžvilgiu (t. y. randamos formulės, apibrėžiančios transformaciją f^{-1}, atvirkštinę f);

2) gautos x ir y išraiškos įrašomos į kreivės Γ lygtį;

3) gautoje lygtyje x' ir y' pakeičiami raidėmis x ir y.

Šį bendrą būdą pritaikykime transformacijoms, išnagrinėtoms 1 skyrelyje.

1 pavyzdys. Tarkime, $\vec{a}$ — lygiagretusis postūmis, kuris koordinačių pradžią O atvaizduoja į tašką $A(a, b)$. Išsprendę 1 skyrelio (2) lygčių sistemą x ir y atžvilgiu, gauname $x=x'-a$, $y=y'-b$. Vadinasi, kai kreivės Γ lygtis $F(x, y)=0$, jos vaizdo Γ' lygtis tokia: $F(x-a, y-b)=0$.

Pavyzdžiui, apskritimas $x^2+y^2=r^2$, kurio centras koordinačių pradžioje, šia transformacija atvaizduojamas į tokio pat spindulio r apskritimą $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, kurio centras taške $A(a, b)$.

2 pavyzdys. Analogiškai įsitikiname, kad simetrija abscisių ašies atžvilgiu kreivė Γ, kurios lygtis $F(x, y)=0$, atvaizduojama į kreivę Γ', apibrėžiamą lygtimi $F(x, -y)=0$; simetrija ordinačių ašies atžvilgiu ta pati kreivė Γ atvaizduojama į kreivę Γ'', apibrėžiamą lygtimi $F(-x, y)=0$, o simetrija koordinačių pradžios atžvilgiu ji atvaizduojama į kreivę Γ''', kurios lygtis $F(-x, -y)=0$.

3 pavyzdys. Iš 1 skyrelio (6) ir (7) formulės išplaukia, kad simetrija tiesės $y=x$ atžvilgiu kreivė Γ, kurios lygtis $F(x, y)=0$, atvaizduojama į kreivę Γ', apibrėžiamą lygtimi $F(y, x)=0$. O simetrija tiesės $y=-x$ atžvilgiu ji atvaizduojama į kreivę Γ'', kurios lygtis $F(-y, -x)=0$.

4 pavyzdys. Išspręskime x ir y atžvilgiu 1 skyrelio (8) lygčių sistemą: $x=x'$, $y=\frac{1}{k}y'$. Iš čia išplaukia, kad ištempimu nuo abscisių ašies, kai ištempimo koeficientas lygus k, kreivė Γ, kurios lygtis $F(x, y)=0$, atvaizduojama į kreivę Γ', apibrėžiamą lygtimi $F\left(x, \frac{y}{k}\right)=0$. Ištempimu, kurio koeficientas k, nuo ordinačių ašies kreivė Γ atvaizduojama į kreivę Γ'', turinčią lygtį $F\left(\frac{x}{k}, y\right)=0$.

Pavyzdžiui, apskritimas $x^2+y^2=a^2$ ištempimu nuo abscisių ašies atvaizduojamas į kreivę, kurios lygtis $x^2+\frac{y^2}{k^2}=a^2$.

5 pavyzdys. Homotetija koordinačių pradžios atžvilgiu, kai homotetijos koeficientas k, kreivė Γ, turinti lygtį $F(x, y)=0$, atvaizduojama į kreivę Γ', apibrėžiamą lygtimi $F\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right)=0$.

6 pavyzdys. Išspręsime x ir y atžvilgiu lygtis, apibrėžiančias posūkį 45° kampu apie koordinačių pradžią (1 skyrelis):

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y'), \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x'+y'). \end{cases}$$

Iš čia išplaukia, kad posūkiu prieš laikrodžio rodyklę 45° kampu apie koordinačių pradžią kreivė Γ, turinti lygtį $F(x, y)=0$, atvaizduojama į kreivę Γ', kurios lygtis

$$F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y),\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)\right)=0.$$

Pavyzdžiui, atvirkščiojo proporcingumo $xy=k$ grafikas tokiu posūkiu atvaizduojamas į kreivę, apibrėžiamą lygtimi

$$\frac{1}{2}(x+y)(-x+y)=k, \text{ arba } y^2-x^2=2k.$$

7 pavyzdys. Inversija, kaip ir simetrija, turi tokią savybę — ji yra atvirkštinė pati sau. Todėl, išreiškę x ir y dydžiais x' ir y', gausime formules, analogiškas 1 skyrelio (12) formulėms:

$$\begin{cases} x=\frac{r^2x'}{(x')^2+(y')^2}, \\ y=\frac{r^2y'}{(x')^2+(y')^2}. \end{cases}$$

Iš to išplaukia, kad šia transformacija (ji dar vadinama simetrija apskritimo atžvilgiu) kreivė Γ, kurios lygtis $F(x, y)=0$, atvaizduojama į kreivę Γ', apibrėžiamą lygtimi

$$F\left(\frac{r^2x}{x^2+y^2},\ \frac{r^2y}{x^2+y^2}\right)=0.$$

Pratimai

55. Įrodykite, kad inversija:

a) tiesė, einanti per inversijos centrą, atvaizduojama į ją pačią;

b) tiesė, neinanti per inversijos centrą, atvaizduojama į apskritimą, einantį per inversijos centrą;

c) apskritimas, einantis per inversijos centrą, atvaizduojamas į tiesę, neinančią per inversijos centrą;

d) apskritimas, neinantis per inversijos centrą, atvaizduojamas į apskritimą, neinantį per inversijos centrą.

56. Raskite abscisių ašies atkarpos [1, 4] vaizdą, gautą inversija apskritimo $x^2+y^2=1$ atžvilgiu.

57. Raskite hiperbolės lanko $xy=1$, $1\leqslant x\leqslant 2$ vaizdą, gautą atvaizdžiu

$$\begin{cases} x'=x^3+y^3, \\ y'=x^3-y^3. \end{cases}$$

58. Raskite parabolės lanko $y=x^2$, $0\leqslant x\leqslant 4$ vaizdą, gautą atvaizdžiu

$$\begin{cases} x'=x^3+y, \\ y'=x^3-y. \end{cases}$$

59. Raskite tiesės $Ax+By+C=0$ vaizdą, gautą dviem nuosekliomis simetrijomis tiesės $y=x$ ir ordinačių ašies atžvilgiu.

60. Remdamiesi 59 uždavinio sprendimu, gaukite tiesių $A_1x+B_1y+C_1=0$ ir $A_2x+B_2y+C_2=0$ statmenumo sąlygą.

61. Iš taško $A(9, -4)$ nubrėžkite statmenį tiesei $6x-2y+5=0$.

3. Kreivių simetrijų tyrimas pagal jų lygtis. Žinant kreivės Γ lygtį, dažnai galima, remiantis tik jos tyrimo rezultatais, padaryti išvadas apie tos kreivės geometrines savybes. Parodysime, kaip tokiu būdu tiriamas lygties $F(x, y)=0$ grafiko simetriškumas koordinačių ašių atžvilgiu, ketvirčių pusiaukampinių ir koordinačių pradžios atžvilgiu.

Tarkime, kad $F(x, y)=F(x, -y)$. Kadangi simetrija abscisių ašies atžvilgiu lygties $F(x, y)=0$ grafikas atvaizduojamas į lygties $F(x, -y)=0$ grafiką, tai jis bus atvaizduojamas į jį patį, nes $F(x, y)=F(x, -y)$. Vadinasi, jis bus simetriškas abscisių ašies atžvilgiu. Abscisių ašies atžvilgiu yra simetriška bet kuri kreivė, kurios lygtyje yra tik lyginiai y laipsniai, pavyzdžiui kreivė, apibrėžiama lygtimi $y^6+3xy^4-3x^3y^2-8x^4=0$. Abscisių ašies atžvilgiu bus simetriška ir kreivė, apibrėžiama lygtimi $F(x, |y|)=0$. Iš tikrųjų, $F(x, |y|)=F(x, |-y|)$.

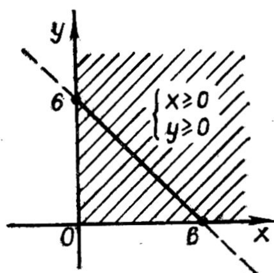
Analogiškai, kai $F(x, y)=F(-x, y)$, tai lygties $F(x, y)=0$ grafikas simetriškas ordinačių ašies atžvilgiu, o kai $F(x, y)=F(-x, -y)$, šis grafikas simetriškas koordinačių pradžios atžvilgiu.

Kai $F(x, y)=F(y, x)$, lygties grafikas simetriškas tiesės $y=x$ atžvilgiu, o kai $F(x, y)=F(-y, -x)$, jis simetriškas tiesės $y=-x$ atžvilgiu.

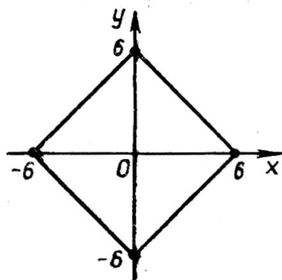
1 pavyzdys. Kreivė, apibrėžiama lygtimi

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2+y^2)-6x^2y^2,$$

turi keturias simetrijos ašis: abscisių, ordinačių ašis ir tieses $y=x$ bei $y=-x$. Iš tikrųjų, šį kartą $F(x, y)=(x^2+y^2)^2-a^2(x^2+y^2)+6x^2y^2$. Kadangi $F(x, y)$ išraiškoje yra tik lyginiai x ir y laipsniai, tai kreivė Γ simetriška abiejų koordinačių ašių atžvilgiu. O kadangi $F(x, y)$ išraiška nekinta, sukeitus x ir y vietomis, tai ir tiesė $y=x$ yra kreivės Γ simetrijos ašis. Įsitikinti, kad kreivė Γ simetriška tiesės $y=-x$ atžvilgiu, gali patys mokiniai.



24 pav.



25 pav.

2 pavyzdys. Lygties

$$|x|+|y|=6 \qquad (16)$$

grafikas irgi turi keturias simetrijos ašis, nes $F(x, y)$ priklauso tik nuo $|x|$ ir $|y|$ ir nekinta, sukeitus x ir y vietomis.

Žinant, kad lygties $F(x, y)=0$ grafikas simetriškas tam tikros ašies arba taško atžvilgiu, pakanka nubraižyti grafiko dalį, o kitą dalį gauti simetrija. Pavyzdžiui, norėdami nubraižyti (16) lygties grafiką, iš pradžių nubraižysime jo dalį, esančią pirmajame ketvirtyje, t. y. srityje, kurioje $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Šioje srityje $|x|=x$, $|y|=y$, todėl (16) lygtis įgyja išraišką $x+y=6$. Tai tiesės lygtis (24 pav.). Suprantama, imame tik tiesės dalį, esančią srityje, apibrėžtoje nelygybėmis $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Gautąją atkarpą atvaizduojame ordinačių ašies atžvilgiu, o gautąją laužtę — abscisių ašies atžvilgiu. Gauname kvadratą, kurio įstrižainės yra koordinačių ašyse (25 pav.).

Pratimai

62. Ištirkite simetrijos požiūriu šių lygčių ir nelygybių grafikus:

a) $x^4+y^4=1$; b) $x^4+3y^4 \leqslant 5$;
c) $x^4+6x^2y^2+y^4=8$; d) $x^3+y^3 \geqslant 27$;
e) $x^3-y^3=8$; f) $|x|+2|y| \leqslant 1$;
g) $x^3+y^3-3xy=1$; h) $x^3-y^3+3xy=0$.

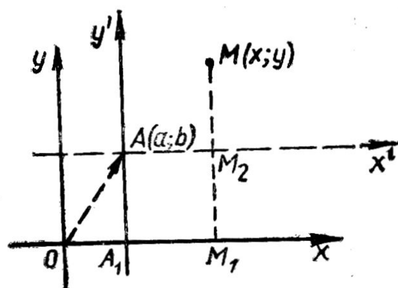
63. Įrodykite, kad aibės $A \cap B$ ir $A \cup B$, kai

$$A=\{M(x, y) \mid x^4+2y^2 \leqslant 1\}, \quad B=\{M(x, y) \mid x^2+6y^4 \leqslant 10\},$$

yra simetriškos koordinačių ašių atžvilgiu.

4. Elipsės, hiperbolės ir parabolės lygčių prastinimas ir tyrimas. Jau išvedėme elipsės, hiperbolės ir parabolės lygtis. Parinkus kitame taške koordinačių pradžią, šias lygtis galima parašyti paprastesne išraiška.

Metodas, kuriuo išvedame formules, reiškiančias naujas taško koordinates senomis, kai keičiama koordinačių sistema, labai panašus į tą būdą, kuriuo išvedame vaizdo, gaunamo geometrine transformacija, koordinačių formules. Tačiau reikia nepamiršti, kad šios situacijos skirtingos: anksčiau nejudėjo koordinačių sistema, o judėjo taškas, o dabar taškas lieka vietoje, bet keičia padėtį koordinačių sistema.



26 pav.

Tarkime, lygiagrečiuoju postūmiu koordinačių sistema perstumta taip, kad koordinačių pradžia atvaizduota į tašką $A(a, b)$. Rasime taško $M(x, y)$ naujas koordinates (x', y'). 26 paveiksle matyti, kad $x'=|AM_2|=|A_1M_1|=|OM_1|-|OA_1|=x-a$, t. y. $x'=x-a$. Analogiškai gauname, kad $y'=y-b$.

Taigi, perkėlus koordinačių pradžią į tašką $A(a, b)$ (nekeičiant ašių krypties ir ilgių matavimo vieneto), taško $M(x, y)$ naujos koordinatės x' ir y' reiškiamos formulėmis

$$\begin{cases} x'=x-a, \\ y'=y-b. \end{cases} \qquad (17)$$

Šias (17) formules taikysime, prastindami parabolės lygtį. Perkelkime koordinačių pradžią į tašką $A\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$. Tuomet $x'=x+\frac{p}{2}$, $y'=y$, todėl (15) lygtis (p. 135) įgis išraišką $(y')^2=2px'$. Pakeitę x' ir y' raidėmis x ir y, gauname parabolės lygtį

$$y^2=2px. \qquad (18)$$

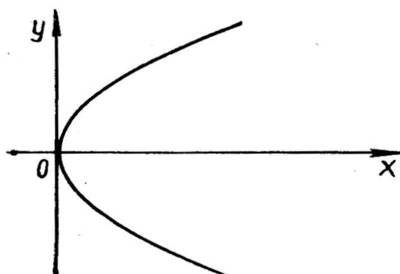
Prastindami elipsės lygtį, koordinačių pradžią perkeliame į tašką $B(c, 0)$. Tuomet (16) lygtis (p. 135) įgis išraišką $\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1$ arba, pakeitus x' ir y' raidėmis x ir y, išraišką

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (19)$$

Pagaliau, perkėlę koordinačių pradžią į tašką $D(-c, 0)$, gauname suprastintą hiperbolės lygtį

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (20)$$

Dabar ištirsime šių trijų kreivių formą. Kadangi $(-y)^2-2px=y^2-2px$, parabolė simetriška abscisių ašies atžvilgiu. Kadangi $0^2=2p\cdot 0$, ji eina per koordinačių pradžią, be to, yra į de-



27 pav.

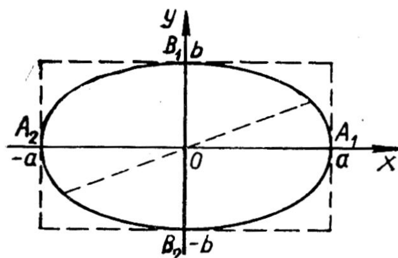
šinę nuo ordinačių ašies, nes $x=\frac{y^2}{2p}\geqslant 0$. Didėjant x, didėja ir y^2 reikšmė, t. y. $|y|$ reikšmės, todėl, judant iš kairės į dešinę, parabolės taškai tolsta nuo abscisių ašies (27 pav.).

Simetrija tiesės $y=x$ atžvilgiu parabolė $y^2=2px$ yra atvaizduojama į kreivę $x^2=2py$, t. y. į žinomą mokiniams kvadratinės funkcijos $y=\frac{x^2}{2p}$ grafiką. Dabar aišku, kodėl kreivė, kai $\varepsilon=1$, buvo pavadinta parabole.

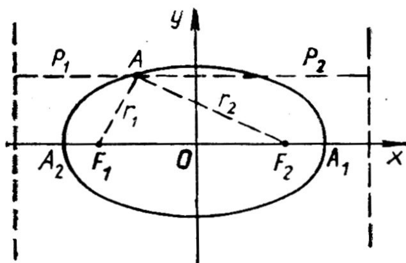
Dabar išnagrinėkime elipsės formą. (19) lygties išraiška rodo, kad elipsė simetriška abiejų koordinačių ašių atžvilgiu. Be to, iš šios lygties išplaukia, kad $\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1$, ir $\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$, todėl $|x|\leqslant a$, $|y|\leqslant \leqslant b$. Vadinasi, elipsė yra stačiakampio viduje; šio stačiakampio centras yra koordinačių pradžioje, kraštinės lygiagrečios koordinačių ašims ir jų ilgiai lygūs $2a$ ir $2b$. Kadangi $|y|=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, tai, didėjant x nuo nulio iki a, $|y|$ reikšmės mažėja nuo $|b|$ iki nulio. Todėl elipsė yra tokia, kokia pavaizduota 28 paveiksle.

Elipsė kerta savo simetrijos ašis taškuose A_1, A_2, B_1, B_2, kurie vadinami jos *viršūnėmis*. Atkarpa A_1A_2 vadinama *didžiąja elipsės ašimi*, o atkarpa B_1B_2 — jos *mažąja ašimi* (kadangi $a^2= =b^2+c^2$, tai $a>b$). Galima įrodyti, kad bet kurio elipsės skersmens (atkarpos, jungiančios taškus, simetriškus jos centro O atžvilgiu) ilgis yra tarp $2b$ ir $2a$, t. y. tarp mažosios ir didžiosios elipsės ašių ilgių.

Kadangi elipsė simetriška, tai ji be židinio ir direktrisės, naudojamų jos apibrėžime, dar turi židinį ir direktrisę, simetriškus pirmiesiems ordinačių ašies atžvilgiu. Abi direktrisės lygiagrečios ordinačių ašiai, todėl jos lygiagrečios ir viena kitai. Kadangi $r_1=$



28 pav.



29 pav.

$=|F_1A|=p_1\varepsilon$, $r_2=|F_2A|=p_2\varepsilon$ (29 pav.), visiems elipsės taškams galioja lygybė $r_1+r_2=p_1\varepsilon+p_2\varepsilon=(p_1+p_2)\varepsilon$.

Dydis p_1+p_2, drauge ir r_1+r_2 yra pastovus. Bet taškui A_1 dydis

$$r_1+r_2=|A_1F_1|+|A_1F_2|=|A_1F_2|+|F_2A_2|=|A_1A_2|=2a.$$

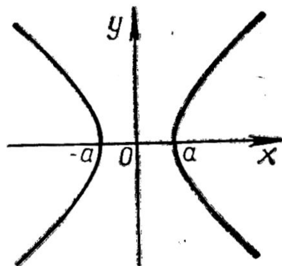
Vadinasi, kad ir koks būtų elipsės taškas, jo atstumų nuo židinių suma vienoda ir lygi $2a$. Galima įrodyti, kad šią savybę turi tik elipsės taškai.

Atskiras elipsės atvejis yra apskritimas, kai $a=b$, $c=0$, abu židiniai sutampa centre, o direktrisė be galo nutolusi. Kiekvieną elipsę galima gauti iš apskritimo ištempimu nuo ašies. Imkime apskritimą $x^2+y^2=a^2$ ir ištempkime jį nuo abscisių ašies, parinkę ištempimo koeficientą $\frac{b}{a}$ (kadangi $b<a$, tai iš tikrųjų apskritimas suspaudžiamas prie abscisių ašies). Šia transformacija apskritimas atvaizduojamas į lygties $x^2+\frac{a^2}{b^2}y^2=a^2$ grafiką, t. y. į elipsę $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Dabar išnagrinėkime hiperbolę $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Kadangi šioje lygtyje yra tik antrieji x ir y laipsniai, hiperbolė simetriška abiejų ašių atžvilgiu. Tačiau, priešingai elipsei, ji nėra aprėžta kreivė. Iš (20) lygties išplaukia, kad $|y|=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, todėl, didėjant x reikšmėms, neaprėžtai didėja ir $|y|$ reikšmės. Be to, $|x|\geqslant a$, todėl hiperbolė neturi taškų, esančių juostoje $-a<x<a$. Vadinasi, ji sudaryta iš dviejų šakų (30 pav.).

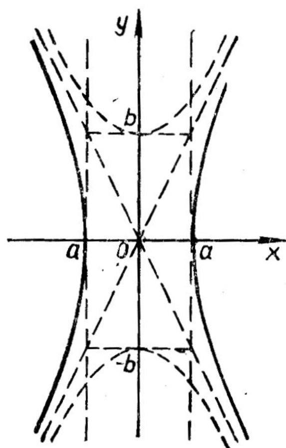
Kadangi hiperbolė simetriška ordinačių ašies atžvilgiu, ji turi du židinius ir dvi direktrises. Paliekame mokiniams įrodyti, kad visiems hiperbolės taškams galioja lygybė $|r_1-r_2|=2a$; čia r_1 ir r_2 — atstumai nuo taško iki židinių.

Kaip elipsė yra gaunama, ištempiant apskritimą nuo abscisių ašies, taip ir hiperbolė $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ gaunama, ištempiant hiperbolę $x^2-y^2=a^2$ nuo abscisių ašies, kai ištempimo koeficientas $k=\frac{a}{b}$. Hiperbolė, kai $a=b$, vadinama *lygiaašė*. Ji gaunama iš atvirkščiojo proporcingumo $xy=\frac{a^2}{2}$ grafiko posūkiu — 45° kampu.



30 pav.

Iš mokyklinio matematikos kurso žinome, kad funkcijos $y=\frac{a^2}{2x}$ grafikas neribotai artėja tiek prie abscisių ašies, tiek ir prie ordinačių ašies, niekada nesusiliedamas su šiomis tiesėmis. Po posūkio — 45° kam-



31 pav.

pu koordinačių ašys atvaizduotos į tieses $y=x$ ir $y=-x$, o ištempimu nuo abscisių ašies, kai ištempimo koeficientas $\frac{b}{a}$, šios tiesės atvaizduotos į tieses $y=\frac{b}{a}x$ ir $y=-\frac{b}{a}x$. Iš to išplaukia, kad hiperbolė $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, didėjant $|x|$, neribotai artėja prie tiesių $y=\frac{b}{a}x$ ir $y=-\frac{b}{a}x$. Šios tiesės vadinamos *hiperbolės asimptotėmis*.

Hiperbolę braižome taip. Nubraižome stačiakampį, kurio centras koordinačių pradžioje, kraštinės lygiagrečios abscisių ir ordinačių ašims ir jų ilgiai atitinkamai lygūs $2a$ ir $2b$. Pratęsę šio stačiakampio įstrižaines, gauname hiperbolės asimptotes. Paskui iš taškų $(a, 0)$ ir $(-a, 0)$ brėžiame kreives, artėjančias prie šių asimptočių (31 pav.).

Tokias pat asimptotes turi ir hiperbolė $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$. Tačiau ši hiperbolė kerta ordinačių ašį, bet nekerta abscisių ašies. 31 paveiksle ji pavaizduota brūkšnine linija.

Pratimai

64. Parašykite (19) išraiškos elipsės lygtį, kai:

a) jos pusašiai yra atitinkamai lygūs 4 ir 2;

b) atstumas tarp židinių lygus 6 ir didysis pusašis lygus 5;

c) didysis pusašis lygus 10 ir ekscentricitetas $\varepsilon=0{,}8$;

d) pusašių suma lygi 8 ir atstumas tarp židinių taip pat lygus 8.

65. Nubraižykite šeimą elipsių, kurių didžioji ašis vienodo ilgio $2a$. Ištirkite, kaip kinta židinio ir direktrisės padėtys, kai b kinta nuo a iki nulio.

66. Pastovaus ilgio atkarpa juda taip, kad jos galai visą laiką „šliaužia" stačiojo kampo kraštinėmis. Įrodykite, kad tuomet kiekvienas atkarpos taškas nubrėžia elipsės ketvirtį.

67. Parašykite (20) išraiškos hiperbolės lygtį, kai:

a) atstumas tarp jos viršūnių lygus 8, o atstumas tarp židinių lygus 10;

b) atstumas tarp viršūnių lygus 6, be to, hiperbolė eina per tašką $A(9, -4)$.

68. Nubraižykite hiperbolių $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ ir $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$ eskizus.

69. Išskyrę dvinario kvadratą, suprastinkite šias lygtis ir nubraižykite atitinkamas kreives:

a) $x^2+4y^2+6x-8y=0$;

b) $9x^2+16y^2+18x+32y-119=0$;

c) $x^2-y^2+8x-6y=0$;

d) $x^2-10y^2+6y=5$.

FUNKCIJŲ GRAFIKŲ BRAIŽYMAS

1. Funkcijų tyrimas ir grafikų braižymas. Dabar imsime tik tą atvejį, kai lygtis, apibrėžianti kreivę Γ, turi išraišką $y=f(x)$, t. y. kai Γ yra tam tikros funkcijos grafikas. Norėdami nubraižyti tokios funkcijos grafiką, turime iš pradžių ištirti tą funkciją, būtent, išsiaiškinti, su kuriomis x reikšmėmis ji apibrėžta, ar grafikas simetriškas ordinačių ašies arba koordinačių pradžios atžvilgiu, kuriuose taškuose funkcijos reikšmės lygios nuliui, o kuriose artėja į begalybę, pagaliau, turime išsiaiškinti, kokios jos begalybėje, t. y. neaprėžtai didėjant argumentui. Taip išanalizavę, galėsime rasti intervalus, kuriuose funkcija turi pastovų ženklą, galėsime numatyti, kokia ji, ir nubraižyti apytikslį jos grafiko eskizą. Norėdami nubraižyti tiksliau, turėtume dar ištirti, kuriuose intervaluose funkcija didėja, o kuriuose — mažėja, rasti taškus, kuriuose ji įgyja maksimaliąsias ir minimaliąsias reikšmes, ištirti jos grafiko iškilumą ir įgaubtumą. Bet tokiu būdu funkcija paprastai tiriama, taikant diferencialinį skaičiavimą, kurio čia nenagrinėsime.

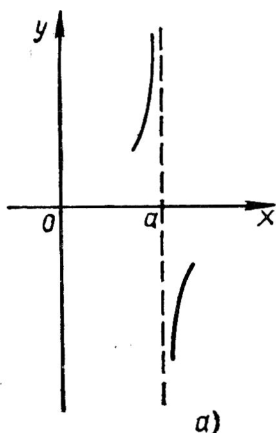
Išnagrinėkime detaliau minėtus funkcijos tyrimo etapus.

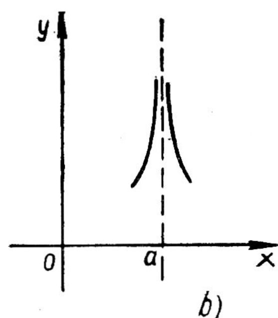
a) F u n k c i j o s a p i b r ė ž i m o s r i t i e s n u s t a t y m a s. Išnagrinėkime, kaip rasti sritį, kurioje egzistuoja reiškinys, apibrėžiantis funkciją. Kai šis reiškinys yra algebrinė trupmena arba iracionalusis reiškinys, pakanka rasti taškus, kuriuose nė vienas vardiklis nelygus nuliui (dalyti iš nulio negalima!), ir intervalus, kuriuose pošakniai neneigiami.

Pavyzdžiui, funkcija $y=\frac{x^2+1}{x^2-4x+3}$ egzistuoja su visomis x reikšmėmis, išskyrus reikšmes 1 ir 3 (lygties $x^2-4x+3=0$ šaknis), o funkcija $y=\sqrt{x^2-16}$, kai $|x|\geqslant 4$.

b) G r a f i k o s i m e t r i š k u m o t y r i m a s. Jau žinome, kad funkcijos $y=f(x)$ grafikas simetriškas ordinačių ašies atžvilgiu tada ir tik tada, kai $f(-x)=f(x)$ su visais x, su kuriais funkcija f apibrėžta. Tokiu atveju funkcija f vadinama *lygine,* nes tipiškas tokių funkcijų pavyzdys — funkcijos $y=x^2$, $y=x^4$ ir apskritai $y=x^{2n}$.

Kai su visais x, su kuriais funkcija f apibrėžta, galioja lygybė $f(-x)=-f(x)$, tai šios funkcijos grafikas simetriškas koordinačių pradžios atžvilgiu. Tokiu atveju funkcija vadinama *nely-*





32 pav.

gine. Tipiškas nelyginių funkcijų pavyzdys — funkcijos $y=x$, $y=x^3$ ir apskritai $y=x^{2n-1}$.

Kai funkcijos grafikas simetriškas, pakanka nubraižyti tik jo dalį, atitinkančią teigiamą pusašę, o dalį, atitinkančią neigiamą pusašę, gauti simetriją.

c) Funkcijos nulių apskaičiavimas. Norėdami rasti taškus, kuriuose funkcija lygi nuliui, turime išspręsti lygtį $f(x)=0$. Kai funkcija f yra dviejų daugianarių santykis, pakanka prilyginti nuliui jos skaitiklį.

d) Funkcijos polių apskaičiavimas. Kai funkcija yra daugianarių santykis, tai jos grafikas šalia taško a, kuriame vardiklis lygus nuliui, o skaitiklis nelygus nuliui, neaprėžtai tolsta nuo abscisių ašies. Tokie taškai vadinami funkcijos *poliais*. Funkcijos padėtis vertikalios tiesės $x=a$ atžvilgiu priklauso nuo to, koks funkcijos ženklas iš kairės ir iš dešinės nuo a. Pavyzdžiui, kai iš kairės nuo a funkcija teigiama, o iš dešinės neigiama, tai jos grafikas toks, koks pavaizduotas 32 paveiksle, a. O kai funkcija teigiama ir iš dešinės, ir iš kairės nuo a, jos grafikas toks, koks pavaizduotas 32 paveiksle, b. Pavyzdžiui, funkcija $y=\frac{1}{x^2-4}$ šalia taško $x=-2$ pirmasis atvejis, o funkcija $y=\frac{1}{(x-3)^2}$ šalia taško $x=-3$ — antrasis atvejis.

e) Nustatymas intervalų, kuriuose funkcija pastovaus ženklo. Žinodami funkcijos nulius ir polius, galime rasti *intervalus* pastovaus ženklo (kuriuose funkcija nekeičia ženklo), nes funkcijos, kurias nagrinėjame, gali keisti ženklą, tik pereidamos per nulinę reikšmę arba per polių. Todėl reikia abscisių ašį funkcijos nulių taškais ir poliais suskaidyti į dalis ir nustatyti funkcijos ženklą kiekviename tarpe.

f) Funkcijos tyrimas begalybėje. Norint ištirti, kokia funkcija begalybėje, reikia ją išreikšti dviejų funkcijų suma,

kurių vienos reikšmė jau žinoma, o kitos reikšmės artėja prie nulio, kai x tolsta nuo koordinačių pradžios. Tuomet, atėmę mažą dėmenį, galėsime spręsti, kokia funkcija begalybėje.

Pavyzdžiui, funkciją $y=\frac{2x^2+4}{x^2+1}$ galima parašyti taip: $y=2+\frac{2}{x^2+1}$. Aišku, kad, didėjant vardikliui, trupmena $\frac{2}{x^2+1}$ mažės ir artės prie nulio. Todėl, kai $|x|$ didelis, funkcijos $y=\frac{2x^2+4}{x^2+1}$ reikšmės beveik lygios 2. Be to, galime pasakyti, kad jos reikšmės, kai $|x|$ didelis, šiek tiek didesnės už 2. Šios funkcijos grafikas pavaizduotas 33 paveiksle.

P a v y z d y s. Pritaikykime aptartą tyrimo planą funkcijai

$$y=\frac{x^2-1}{x^2-4}.$$

a) Funkcija apibrėžta, kai x nelygus 2 ir -2.

b) Kadangi

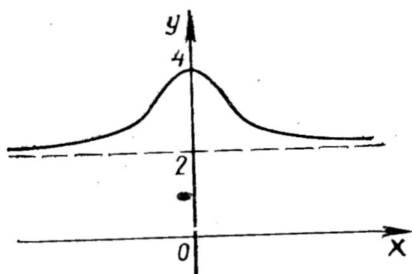
$$f(-x)=\frac{(-x)^2-1}{(-x)^2-4}=\frac{x^2-1}{x^2-4}=f(x),$$

tai funkcija lyginė, jos grafikas simetriškas ordinačių ašies atžvilgiu. Todėl šią funkciją tirsime tik kai $x\geqslant 0$.

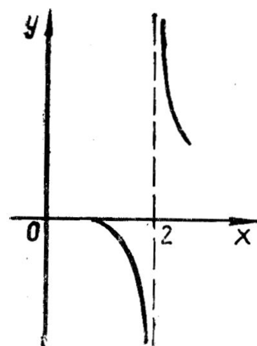
c) Funkcija f lygi nuliui, kai $x=1$ (priminsime, kad funkciją tiriame tik teigiamame pusašyje).

d) Funkcijos f polius teigiamame pusašyje yra taškas $x=2$ (lygties $x^2-4=0$ teigiama šaknis).

e) Taškai 1 ir 2 teigiamą pusašį suskaido į intervalus $[0, 1[$, $]1, 2[$, $]2, +\infty[$. Kiekvienoje tokioje dalyje funkcija ženklo nekeičia. Įrašę į $\frac{x^2-1}{x^2-4}$ reikšmes $x_1=0$, $x_2=\frac{3}{2}$, $x_3=3$, įsitikiname, kad ši funkcija teigiama intervaluose $[0, 1[$ ir $]2, +\infty[$, o neigiama intervale $]1, 2[$. Iš to išplaukia, kad funkcijos elgsena šalia taško $x=2$ yra tokia, kaip parodyta 34 paveiksle.



33 pav.



34 pav.

f) Kadangi $\frac{x^2-1}{x^2-4}=1+\frac{3}{x^2-4}$,

tai su didelėmis $|x|$ reikšmėmis funkcija f beveik lygi 1, be to, ji šiek tiek didesnė už 1.

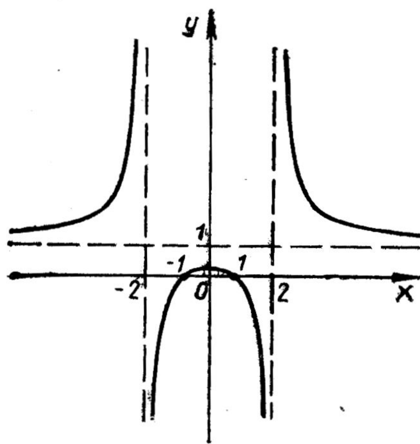
Remdamiesi analizės rezultatais, sudarome lentelę:

x	0	[0, 1[	1	]1, 2[	$2-0$	$2+0$	]2, $+\infty$[	$+\infty$
y	$\frac{1}{4}$	>0	0	<0	$-\infty$	$+\infty$	>0	$1+0$

Šioje lentelėje vartojami sąlyginiai žymėjimai. Užrašas $2-0$ reiškia, kad x artėja prie 2, būdamas mažesnis už jį. Atitinkantis šį žymėjimą užrašas $-\infty$ rodo, kad neaprėžtai didėja y reikšmių modulis, o pačios reikšmės neigiamos, todėl funkcijos grafikas neribotai tolsta žemyn nuo abscisių ašies. Analogišką prasmę turi užrašai $2+0$ ir $+\infty$. O užrašas $y=1+0$, kai $x=+\infty$, reiškia, kad, neaprėžtai didėjant x, funkcijos y reikšmės neribotai artėja prie 1, būdamos didesnės už 1.

Pagal šią lentelę braižome funkcijos grafiko dalį, atitinkančią teigiamą pusašį, o paskui ją simetriškai atvaizduojame ordinačių ašies atžvilgiu (35 pav.).

Suprantama, tokio tyrimo dar nepakanka: jis negarantuoja, ar nepraleidome kokių nors funkcijos grafiko vingių. Bet šį kartą nesunku parodyti, kad jokių komplikacijų nėra. Trupmenos $\frac{3}{x^2-4}$ vardiklis, didėjant $|x|$, visą laiką didėja. Todėl trupmena visą laiką mažėja. Kadangi $\frac{x^2-1}{x^2-4}=1+\frac{3}{x^2-4}$, tai grafikas negali turėti jokių vingių.



35 pav.

Pratimai

70. Ištirkite šias funkcijas ir nubraižykite jų grafikus:

a) $y=\frac{x^2-4}{x^2-1}$; b) $y=\frac{x^2+4}{x^2+1}$;

c) $y=\frac{x^2+1}{x^2+4}$; d) $y=\frac{x^2-1}{x^2+4}$;

e) $y=\frac{x^2-4}{x^2+1}$; f) $y=\frac{x^2+1}{x^2-4}$;

g) $y=\frac{x^2+4}{x^2-1}$; h) $y=\frac{2(x^2+4)}{x^2-1}$.

71. Ištirkite, kokios funkcijos — lyginės ar nelyginės:

a) $y=x^3-4x|x|-3x$;
b) $y=8x^{16}+x^6-3|x|+8$;
c) $y=\frac{x^4+6}{x^2+2}$;
d) $y=\sqrt{x}$;
e) $y=\sqrt{x^2+4}$;
f) $y=\sqrt{x^2}$.

72. Tarkime, kad funkcija $y=f(x)$ apibrėžta, kad ir kokios būtų x reikšmės. Įrodykite, kad funkcija $y=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ yra lyginė, o funkcija $y=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ nelyginė.

73. Šias funkcijas išreikškite lyginės ir nelyginės funkcijos suma:

a) $y=5x^4-3x^3+2x^2-7x+2|x|+1$;
b) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$; c) $y=\frac{x^3-4}{x^2+8}$.

74. Įrodykite, kad bet kurią funkciją, apibrėžtą su visomis x reikšmėmis, galima išreikšti lyginės ir nelyginės funkcijos suma.

75. Įrodykite, kad dviejų lyginių funkcijų sandauga ir dviejų nelyginių funkcijų sandauga yra lyginės funkcijos, o lyginės ir nelyginės funkcijos sandauga yra nelyginė funkcija.

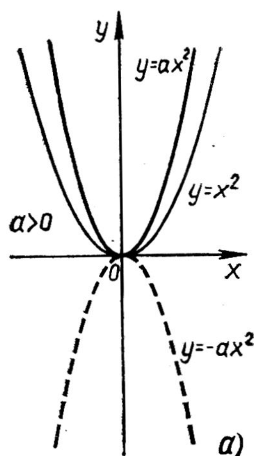
76. Raskite šių funkcijų polius ir ištirkite jas polių aplinkoje:

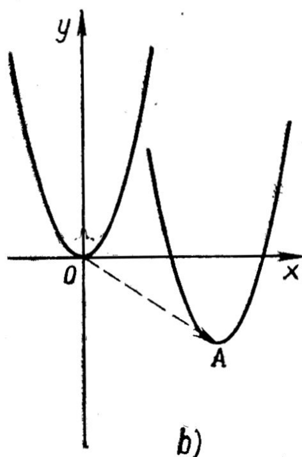
a) $y=\frac{x}{x^3+8}$; b) $y=\frac{x+2}{x^2+2x-3}$;
c) $y=\frac{x^3}{(x^2-4)(x^2-9)}$; d) $y=\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

77. Ištirkite funkcijų elgseną begalybėje:

a) $y=\frac{3x^4}{x^4+1}$; b) $y=\frac{x^2}{x^3+1}$;
c) $y=\frac{x^3}{x^2+4}$; d) $y=\frac{x^3+2x^2}{x^3+1}$.

2. Geometrinių transformacijų taikymas, braižant funkcijų grafikus. Kaip ir bet kurių lygčių, taip ir funkcijų grafikus galima braižyti, transformuojant jau žinomus grafikus. Pavyzdžiui, žinodami funkcijos $y=f(x)$ grafiką, lygiagrečiuoju postūmiu galime iš jo gauti funkcijos $y=f(x-\alpha)+\beta$ grafiką. Parašykime šią lygybę taip: $y-\beta=f(x-\alpha)$. Dabar aišku, kad šios funkcijos grafikas gaunamas iš funkcijos $y=f(x)$ grafiko lygiagrečiuoju postūmiu, kuriuo koordinačių pradžia atvaizduojama į tašką A (α, β). Ly-





36 pav.

giai taip pat įsitikiname, kad funkcijos $y=\lambda f(x)$ grafikas, kai $\lambda>0$, gaunamas iš funkcijos $y=f(x)$ grafiko ištempimu nuo abscisių ašies, kurio koeficientas λ. Kai $\lambda<0$, iš pradžių reikia grafiką ištempti, taikant ištempimo koeficientą $|\lambda|$, o paskui simetriškai atvaizduoti abscisių ašies atžvilgiu. Pagaliau, funkcijos $y=f(\lambda x)$ grafikas gaunamas iš funkcijos $y=f(x)$ grafiko ištempimu nuo ordinačių ašies, kai ištempimo koeficientas lygus λ. Kai $\lambda<0$, po grafiko ištempimo, kurio koeficientas $|\lambda|$, reikia jį simetriškai atvaizduoti ordinačių ašies atžvilgiu.

1 pavyzdys. Pritaikysime geometrinių transformacijų metodą, braižydami kvadratinės funkcijos $y=ax^2+bx+c$ grafiką. Pradiniu grafiku laikysime parabolę $y=x^2$. Iš pradžių tapačiai pertvarkome: $y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\right.$ $\left.+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$. Pažymėję $-\frac{b}{2a}=\alpha$, $\frac{4ac-b^2}{4a}=$ $=\beta$, gauname lygtį $y=a(x-\alpha)^2+\beta$. Vadinasi, funkcijos $y=ax^2+$ $+bx+c$ grafikas gaunamas iš funkcijos $y=ax^2$ grafiko lygiagrečiuoju postūmiu, kuriuo koordinačių pradžia atvaizduojama į tašką $A(\alpha, \beta)$, t. y. į tašką $A\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

Funkcijos $y=ax^2$ grafikas, kai $a>0$, gaunamas iš funkcijos $y=x^2$ grafiko ištempimu nuo abscisių ašies, kurio koeficientas a, o kai $a<0$ — ištempimu, kurio koeficientas $|a|$ ir simetrija abscisių ašies atžvilgiu.

36 paveiksle parodyta, kaip nuosekliai braižomas funkcijos $y=ax^2+bx+c$ grafikas.

2 pavyzdys. Lygiai tokiu pat būdu, paėmę pradiniu funkcijos $y=\frac{1}{x}$ grafiką, galime nubraižyti funkcijos $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ (trupmeninės-tiesinės funkcijos) grafiką. Kai $c=0$, trupmeninė-tiesinė funkcija virsta tiesine: $y=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$. Kai $c\neq0$, bet $ad-bc=0$, tai $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, todėl su visomis x reikšmėmis, išskyrus $x=-\frac{d}{c}$, trupmeninė-tiesinė funkcija yra pastovi, $y=\frac{a}{c}$. Tokių atvejų nenagrinėsime ir tarsime, kad $c\neq0$ ir $ad-bc\neq0$.

Trupmeną $\frac{ax+b}{cx+d}$ pertvarkome taip:

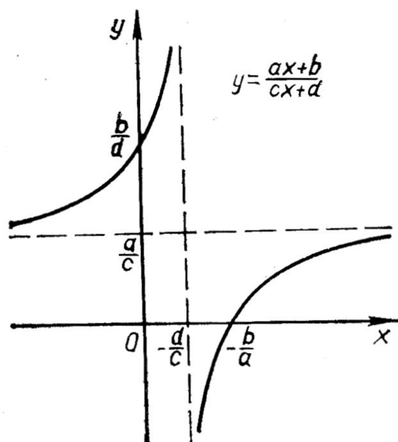
$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2\left(x+\frac{d}{c}\right)}.$$

Dabar aišku, kad, pažymėję $\alpha=-\frac{d}{c}$, $\beta=\frac{a}{c}$, $\lambda=\frac{bc-ad}{c^2}$, gausime

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{\lambda}{x-\alpha}+\beta.$$

Todėl trupmeninės-tiesinės funkcijos grafikas gaunamas iš atvirkščiojo proporcingumo $y=\frac{\lambda}{x}$ grafiko lygiagrečiuoju postūmiu, kuriuo koordinačių pradžia atvaizduojama į tašką $A(\alpha, \beta)$, t. y. $A\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$. Funkcijos $y=\frac{\lambda}{x}$ grafiką, kai $\lambda>0$, galima gauti iš funkcijos $y=\frac{1}{x}$ grafiko ištempimu nuo abscisių ašies, kurio koeficientas λ, o kai $\lambda<0$ — ištempimu, kurio koeficientas $|\lambda|$ ir simetrija abscisių ašies atžvilgiu.

Trupmeninė-tiesinė funkcija lygi nuliui, kai $x=-\frac{b}{a}$ ir turi polių taške $x=-\frac{d}{c}$. Neaprėžtai didėjant x, jos reikšmės artėja prie $\frac{a}{c}$. Kai $x=0$, $y=\frac{b}{d}$. Todėl, prieš braižant patį trupmeninės-tiesinės funkcijos grafiką, pravartu nubrėžti tieses $y=\frac{a}{c}$ ir $x=-\frac{d}{c}$ (horizontaliąją ir vertikaliąją asimptotę) ir pažymėti taškus $B\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ ir $C\left(0, \frac{b}{d}\right)$. Po to nubraižyti grafiką nesunku (37 pav.).



37 pav.

Pratimai

78. Nubraižykite grafikus šių funkcijų:

a) $y=2x^2-8x+1$;
b) $y=-3x^2-12x+4$;
c) $y=\frac{2x-1}{x-1}$;
d) $y=\frac{3x+6}{x+4}$;
e) $y=(x-1)^3+7$;
f) $y=\sqrt{x-2}+1$;
g) $y=(x+1)^4-5$;
h) $y=2\sqrt[3]{x-4}+5$.

3. **Grafikų „sudėtis" ir „daugyba".** Kai funkciją f, kurios grafiką reikia nubraižyti, galima išreikšti dviejų funkcijų, kurių grafikai žinomi, suma $f=g+h$, darome taip. Iš pradžių braižome funkcijų g ir h grafikus, o paskui sudedame šių grafikų tam tikrų taškų ordinates. Suprantama, visų pirma imami charakteringiausi grafikų taškai.

1 pavyzdys. Nubraižykite funkcijos $y=x^2+\frac{1}{x}$ grafiką.

Funkcijų $y=x^2$ ir $y=\frac{1}{x}$ grafikai žinomi. Išanalizavę šių funkcijų grafikus, suvokiame, kad funkcijos $y=x^2+\frac{1}{x}$ grafikas šalia taško $x=0$ beveik susilieja su funkcijos $y=\frac{1}{x}$ grafiku, kartu būdamas šiek tiek aukščiau už jį, o kai $|x|$ reikšmės yra didelės, jis beveik susilieja su funkcijos $y=x^2$ grafiku, kartu būdamas šiek tiek aukščiau už pastarąjį, kai $x>0$, ir žemiau, kai $x<0$. Apskaičiavę funkcijos reikšmes keliuose tarpiniuose taškuose, matome, kad ieškomasis grafikas yra toks, koks pavaizduotas 38 paveiksle.

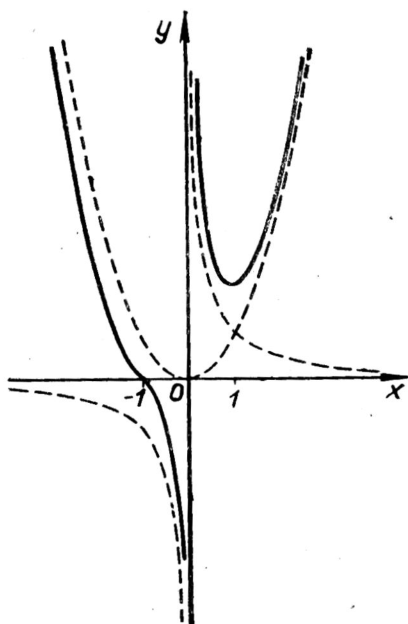
Analogiškai braižome grafiką, kai funkcija yra sandauga arba dalmuo dviejų funkcijų, kurių grafikai žinomi.

2 pavyzdys. Nubraižykime funkcijos $y=\frac{x}{1+x^2}$ grafiką. Iš pradžių braižome funkcijų $y=x$ ir $y=1+x^2$ grafikus. Padaliję atitinkamas ordinates, įsitikiname, kad ieškomas grafikas yra toks, koks pavaizduotas 39 paveiksle.

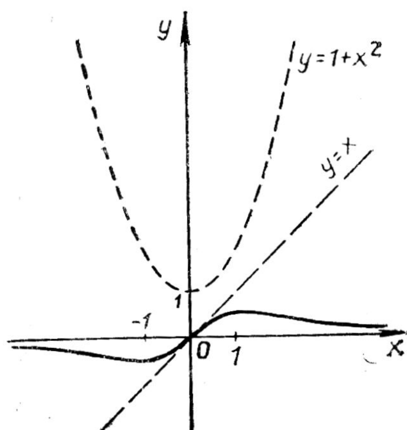
Pratimai

79. Nubraižykite grafikus šių funkcijų:

a) $y=x+\frac{1}{x^2}$;
b) $y=\frac{1}{x^4+1}$;
c) $y=\frac{x}{x^4+1}$;
d) $y=(x+1)\left(\frac{1}{x^2}+4\right)$.

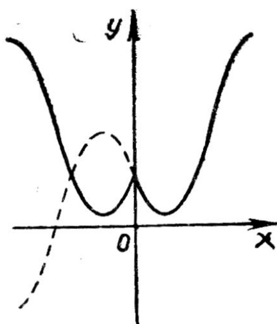


38 pav.

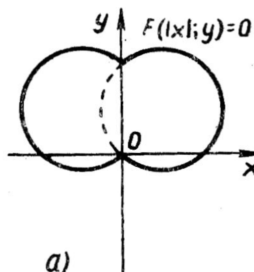


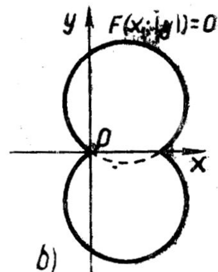
39 pav.

4. Funkcijų ir lygčių, turinčių modulio ženklą, grafikų braižymas. Nubraižius funkcijos $y=f(x)$ grafiką, nesunku nubraižyti funkcijos $y=f(|x|)$ grafiką. Reikia prisiminti, kad $|x|=x$, kai $x\geqslant 0$, ir $|-x|=|x|$. Vadinasi, kai $x\geqslant 0$, funkcijų $y=f(x)$ ir $y=f(|x|)$ grafikai sutampa. Iš lygybės $|-x|=|x|$ išplaukia, kad funkcijos $y=f(|x|)$ grafikas yra simetriškas ordinačių ašies atžvilgiu. Todėl reikia paimti funkcijos $y=f(x)$ grafiko dalį, esančią pusplokštumėje $x\geqslant 0$, tą dalį simetriškai atvaizduoti ordinačių ašies atžvilgiu ir sujungti gautąsias aibes (40 pav.). Analogiškai iš lygties $F(x, y)=0$ grafiko gaunami lygčių $F(|x|, y)=0$ ir $F(x, |y|)$ grafikai (41 pav., *a*, *b*).

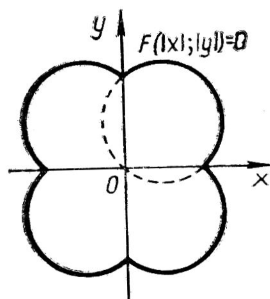


40 pav.





41 pav.



42 pav.

Lygties $F(|x|, |y|)=0$ grafiką braižome taip: imame lygties $F(x, y)=0$ grafiko dalį, esančią pirmajame ketvirtyje, atvaizduojame ordinačių ašies atžvilgiu, o paskui abiejų grafiko dalių sąjungą atvaizduojame abscisių ašies atžvilgiu (42 pav.).

Analogiškai braižome funkcijos $y=f(-|x|)$ grafiką: imame grafiko dalį, esančią pusplokštumėje $x\leqslant 0$, tą dalį atvaizduojame ordinačių ašies atžvilgiu ir sujungiame gautąsias aibes.

Siūlome patiems išanalizuoti, kaip braižomi lygčių

$$F(-|x|, y)=0,\ F(x, -|y|)=0,\ F(-|x|, |y|)=0,\ F(|x|, -|y|)=0,\ F(-|x|, -|y|)=0 \text{ grafikai.}$$

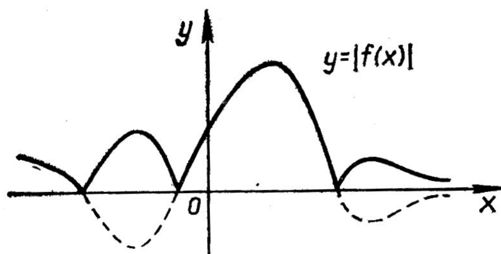
Dabar pagal funkcijos $y=f(x)$ grafiką nubraižysime funkcijos $y=|f(x)|$ grafiką. Remdamiesi modulio apibrėžimu, parašome

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x), & \text{kai } f(x)\geqslant 0, \\ -f(x), & \text{kai } f(x)<0. \end{cases}$$

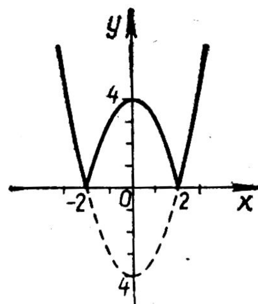
Vadinasi, norėdami nubraižyti funkcijos $y=|f(x)|$ grafiką, turime iš pradžių nubrėžti funkcijos $y=f(x)$ grafiką, paskui grafiko dalį, esančią virš abscisių ašies ir pačioje ašyje, paliekame nepakeitę, o grafiko dalį, esančią po šia ašimi, pakeičiame jos vaizdu, gautu simetrija abscisių ašies atžvilgiu (43 pav.).

P a v y z d y s. Nubraižykite funkcijos $y=|x^2-4|$ grafiką.

Iš pradžių braižome funkcijos $y=x^2-4$ grafiką, o paskui jo dalį, atitinkančią x reikšmes nuo -2 iki 2 (su šiomis x reikšmėmis reiškinys x^2-4 yra neigiamas), atvaizduojame abscisių ašies atžvilgiu (44 pav.).



43 pav.



44 pav.

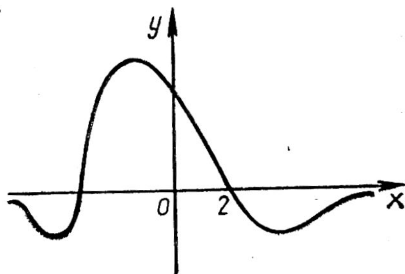
Pratimai

80. Nubraižykite grafikus šių funkcijų:

a) $y=|x-1|$; b) $y=|x+1|$;
c) $y=||x|-1|-1|$; d) $y=|x^2-4|$;
e) $y=||x^2-1|-1|$; f) $y=|x|-1$;
g) $y=\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$; h) $y=\left|\frac{2-x}{x+1}\right|$;
i) $y=\frac{|x|+1}{|x|-1}$; j) $y=\frac{2-|x|}{|x|+1}$.

81. 45 paveiksle pavaizduotas funkcijos $y=f(x)$ grafikas. Nubraižykite grafikus šių funkcijų:

a) $y=-f(|x|)$; b) $y=|f(|x|)|$;
c) $y=|f(-|x|)|$; d) $y=|f(x-2)|$;
e) $y=|f(x)-2|$;
f) $y=|f(|x-2|)|$;
g) $y=|f(-|x-2|)|$.



45 pav.

82. Nubraižykite grafikus šių funkcijų:

a) $y=|x-5|-2|x|+|x+3|$;
b) $y=2|x+4|-3|x|+|x-6|$;
c) $y=|x-3|\cdot|x+4|$;
d) $y=|x|\pm\sqrt{4-x^2}$.

Šiame skyriuje papasakosime, kaip lyginamos viena su kita aibės, turinčios be galo daug elementų, ir kaip nustatoma, kad jos turi vienodą kiekį elementų arba vienoje aibėje yra daugiau elementų negu kitoje.

1. Atvirkštiniai atvaizdžiai. Aibės, susidedančios iš baigtinio kiekio elementų, vadinamos *baigtinėmis*. Štai keli tokių aibių pavyzdžiai: bulvių, supiltų į maišą, aibė, jūros žuvų aibė ir netgi Saulės sistemos atomų aibė (nors šių atomų yra labai daug, jų kiekis vis dėlto išreiškiamas tam tikru natūriniu skaičiumi). Tuo tarpu natūrinių skaičių aibė, plokštumos taškų aibė, tos pačios plokštumos skritulių aibė ir t. t. yra *begalinės* — jų elementų kiekio negalima išreikšti jokiu natūriniu skaičiumi.

Iš pradžių matematikai manė, kad nėra prasmės svarstyti, kuri dviejų begalinių aibių „labiau begalinė", pavyzdžiui, ko daugiau — natūrinių skaičių ar plokštumos taškų. Tačiau antroje XIX a. pusėje išmoko ne tik kelti, bet ir spręsti tokius klausimus. Atsirado begalinių aibių teorija, pagrįsta apgręžiamojo atvaizdžio sąvoka.

Norėdami sužinoti, kurioje baigtinėje aibėje yra daugiau elementų, galime juos suskaičiuoti. Pavyzdžiui, jei pirmoje aibėje yra 2701 elementas, o antroje — tik 1934 elementai, tai aišku, kad pirmoje aibėje elementų daugiau negu antroje. Bet ne visada galima lengvai suskaičiuoti, kiek aibė turi elementų (pabandykite, pavyzdžiui, suskaičiuoti, kiek yra smiltelių jūros krante), antra vertus, ne visada to ir reikia. Pavyzdžiui, norėdami sužinoti, ko daugiau šokių salėje — vaikinų ar merginų, galime paleisti muziką, ir jei kiekvienas vaikinas pakvies merginą šokiui ir visi šoks, tai be skaičiavimo bus aišku, kad vaikinų ir merginų salėje yra po lygiai. Jei vaikinų liks be partnerių, tai irgi aišku, kad vaikinų salėje daugiau (1 pav.).

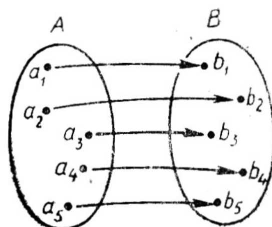
Matematikos kalba tokį aibių palyginimo metodą galima apibūdinti taip. Sakoma, kad yra **apibrėžtas apgręžiamasis aibės *A* atvaizdis į aibę *B*, kai kiekvieną aibės *A* elementą *a* atitinka tam tikras aibės *B* elementas *b*** (2 pav.), **be to, kiekvienas aibės *B* elementas priskirtas vienam ir tik vienam aibės *A* elementui** (pavyzdžiui, kai šoka visi vaikinai ir merginos, tai kiekvieną vaikiną atitinka viena mergina — ta, su kuria dabar jis šoka, be to, kiekviena mergina šoka su vienu ir tik su vienu vaikinu). Elementas *b*, gautas



1 pav.

iš elemento a atvaizdžiu φ, vadinamas jo *vaizdu* ir žymimas $\varphi(a)$. Taip pat rašoma $a \rightarrow b$.

Kiekvienas apgręžiamasis atvaizdis φ nustato atitiktį tarp aibių A ir B elementų. Šią atitiktį galima apibrėžti jos grafiku, t. y. porų (a, b) aibe; čia $a \in A$, o b — aibės B elementas, atitinkantis elementą a. Iš apgręžiamojo atvaizdžio apibrėžimo išplaukia, kad tuomet kiekvienas A elementas a, kaip ir kiekvienas B elementas b, patenka į vieną ir tik į vieną porą. Pavyzdžiui, apgręžiamasis atvaizdis, kurį matome 2 paveiksle, apibrėžiamas aibe porų



2 pav.

$$\{(a_1;\ b_1),\ (a_2;\ b_2),\ (a_3;\ b_3),\ (a_4;\ b_4),\ (a_5;\ b_5)\}.$$

Kai φ — apgręžiamasis aibės A atvaizdis į aibę B, kiekvieną B elementą b atitiks vienas ir tik vienas A elementas a, su kuriuo $\varphi(a)=b$. Priskyrę kiekvienam $b \in B$ tokį elementą $a \in A$, su kuriuo $\varphi(a)=b$, gausime aibės B atvaizdį aibėje A. Jis vadinamas *atvirkštiniu* atvaizdžiu φ ir žymimas φ^{-1}. Aišku, kad tuomet kiekvienas aibės A elementas yra vieno aibės B elemento vaizdas, t. y. φ^{-1} — apgręžiamasis B atvaizdis į aibę A. Taigi, kai egzistuoja apgręžiamasis aibės A atvaizdis φ į aibę B, egzistuoja ir apgręžiamasis aibės B atvaizdis φ^{-1} į aibę A. Todėl sakoma, kad **apgręžiamasis aibės A atvaizdis φ į aibę B apibrėžia abipusiškai vienareikšmę atitiktį tarp šių aibių.** Kaip tarp aibių A ir B yra abipusiškai vienareikšmė atitiktis, tai jos vadinamos *ekvivalenčiomis* (arba lygios galios) aibėmis ir žymimos $A \sim B$.

P a v y z d y s. Lyginių natūrinių skaičių aibė A ekvivalenti nelyginių natūrinių skaičių aibei B. Iš tikrųjų, kiekvienas lyginis natūrinis skaičius turi išraišką $2n$, o kiekvienas nelyginis natūrinis skaičius turi išraišką $2n-1$; čia abiem atvejais $n \in N$. Todėl, priskyrę skaičiui $2n$ skaičių $2n-1$, gausime apgręžiamąjį A atvaizdį į B (pavyzdžiui, skaičių 2 atitiks skaičius 1, skaičių 100 — skaičius 99 ir t. t.).

Pratimai

1. Įrodykite, kad bet kuri aibė A ekvivalenti jai pačiai. Ši savybė vadinama ekvivalentumo *refleksyvumu*.

2. Įrodykite, kad $B \sim A$, kai $A \sim B$. Ši savybė vadinama ekvivalentumo *simetriškumu*.

3. Įrodykite, kad $A \sim C$, kai $A \sim B$ ir $B \sim C$. Ši savybė vadinama ekvivalentumo *tranzityvumu*.

4. Nustatykite abipusiškai vienareikšmę atitiktį tarp natūrinių skaičių aibės N ir natūrinių skaičių kvadratų aibės B.

5. Nustatykite abipusiškai vienareikšmę atitiktį tarp natūrinių skaičių aibės N ir aibės $B=\{10^n | n \in N\}$ (t. y. skaičių, turinčių išraišką 10^n, $n \in N$ aibės).

6. Nustatykite abipusiškai vienareikšmę atitiktį tarp plokštumos skritulių, kurių spindulys lygus 1, ir šios plokštumos taškų.

7. Kiekvienam plokštumos apskritimui priskiriamas jo centras. Ar galima tvirtinti, kad tuo pačiu bus apibrėžta abipusiškai vienareikšmė atitiktis tarp plokštumos apskritimų aibės ir šios plokštumos taškų aibės?

8. Nustatykite abipusiškai vienareikšmę atitiktį tarp plokštumos apskritimų aibės ir kvadratų, kurių kraštinės lygiagrečios koordinačių ašims, aibės.

9. Nustatykite abipusiškai vienareikšmę atitiktį tarp pusapskritimio taškų aibės ir jo skersmens taškų aibės.

10. Nustatykite abipusiškai vienareikšmę atitiktį tarp abscisių ašies taškų aibės ir parabolės taškų aibės.

11. Kiekvienam abscisių ašies taškui x pagal taisyklę $y=x^2$ priskiriamas ordinačių ašies taškas y. Ar bus šis atvaizdis abipusiškai vienareikšmė atitiktis tarp abscisių ašies ir ordinačių ašies taškų aibių? Ar atvaizdis $x \to x^2$ apibrėš abipusiškai vienareikšmę atitiktį tarp abscisių ašies taškų aibės ir ordinačių ašies taškų, kuriems $y \geqslant 0$, aibės; tarp abscisių ašies taškų, kuriems $x \geqslant 0$, aibės ir ordinačių ašies taškų, kuriems $y \geqslant 0$, aibės?

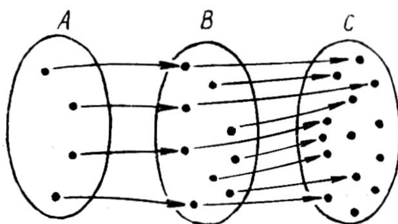
2. Aibių palyginimas. Nustatyti abipusiškai vienareikšmę atitiktį tarp baigtinių aibių A ir B galima tik tada, kai šios aibės turi po lygiai elementų [1]. Todėl kyla mintis, kad panašiu būdu galima paaiškinti, ką reiškia tvirtinimas „Begalinės aibės A ir B turi po lygiai elementų". Būtent, sakoma, kad aibės $\boldsymbol{A}$ **ir** $\boldsymbol{B}$ (nesvarbu kokios, baigtinės ar begalinės) **turi po lygiai elementų** (arba: kad aibėje A yra tiek elementų, kiek jų yra aibėje B), kai jos ekvivalenčios, t. y. kai tarp jų galima nustatyti abipusiškai vienareikšmę atitiktį.

Iš 1 skyrelio 1—3 pratimų išplaukia, kad sąryšis *„turėti tiek pat elementų"* begalinių aibių atveju pasižymi savybėmis, kurios panašios į šio sąryšio savybes baigtinių aibių atveju. Bet tarp baigtinių ir begalinių aibių savybių yra vienas esminis skirtumas. Baigtinėms aibėms visada galioja tvirtinimas „objekto dalis yra mažesnė už visą objektą". Tai reiškia, kad tuomet, kai B — baigtinė aibė, o A — aibės B poaibis, nesutampantis su B, tai aibėje A yra mažiau elementų negu aibėje B. Begalinėms aibėms ne visai taip: aibės dalis gali turėti tiek elementų, kiek jų turi visa aibė.

---

[1] Nors šis tvirtinimas ir atrodo aiškus, bet iš tikrųjų jį galima įrodyti, remiantis aksiomomis, kuriomis apibrėžiama natūrinio skaičiaus sąvoka. Šio įrodymo čia nepateikiame, nes mokykloje nagrinėjama natūrinių skaičių aksiomatika.

Iš tikrųjų, kaip rodo 1 skyrelio 4 pratimas, yra abipusiškai vienareikšmė atitiktis tarp visų natūrinių skaičių aibės N ir natūrinių skaičių kvadratų aibės B (pavyzdžiui, atitiktis, kuria skaičiui n priskiriamas jo kvadratas n^2, $n \to n^2$). Bet natūrinių skaičių kvadratų aibė yra tik aibės N dalis, be to, nesutampanti su N. Aibės A dalis, nesutampanti su A, vadinama *tikrine* jos dalimi. Vadinasi, begalinėms aibėms galima nustatyti abipusiškai vienareikšmę atitiktį tarp visos aibės ir jos tikrinės dalies.



3 pav.

Taigi, kai egzistuoja abipusiškai vienareikšmė atitiktis tarp begalinės aibės A ir aibės B tikrinės dalies B_1, dar negalima tvirtinti, kad aibėje A yra elementų mažiau negu aibėje B (jei A ir B būtų baigtinės aibės, šis tvirtinimas būtų teisingas). Suformuluokime tokį apibrėžimą.

Aibėje A elementų yra ne daugiau negu aibėje B, kai aibė A ekvivalenti aibės B poaibiui B_1 (t. y kai $A \sim B_1$; čia $B_1 \subset B$).

Šio sąryšio savybės panašios į sąryšio „turėti elementų ne daugiau negu“, galiojančio baigtinėse aibėse, savybes:

a) kai aibėje A elementų yra ne daugiau negu aibėje B, o aibėje B elementų yra ne daugiau negu aibėje C, tai aibėje A elementų yra ne daugiau negu aibėje C (3 pav.);

b) kai aibėje A elementų yra ne daugiau negu aibėje B, o aibėje B elementų yra ne daugiau negu aibėje A, tai aibės A ir B elementų turi po lygiai.

Nors b) teiginys atrodo toks pat savaime aiškus, kaip ir a) teiginys, tačiau jo įrodymas gana sudėtingas ir jo čia nepateikiame.

Įdomu, kad aibių teorijos kūrėjas Georgas Kantoras, suformulavęs šį teiginį, nesugebėjo jo įrodyti ir tai pasakė per paskaitą universiteto studentams. Po kelių dienų jaunas studentas Feliksas Bernšteinas atnešė jam šios teoremos įrodymą. Todėl ji vadinama Kantoro—Bernšteino teorema.

Dabar jau galime apibrėžti, ką reiškia žodžiai *„aibėje A elementų yra mažiau negu aibėje B“*. Tai reiškia, pirma, kad aibėje A elementų yra ne daugiau negu aibėje B (t. y. $A \sim B_1$, $B_1 \subset B$), o antra, kad aibės A ir B yra neekvivalenčios (t. y., kad aibės A ir B elementų turi ne po lygiai).

Dažnai pravartu prisiminti tokį tvirtinimą.

Kai egzistuoja aibės A atvaizdis φ į aibę B, tai aibėje B elementų yra ne daugiau negu aibėje A. Iš tikrųjų, priskirkime kiekvienam aibės B elementui b poaibį $\varphi^{-1}(b) \subset A$, sudarytą iš visų tokių elementų $a \in A$, su kuriais $\varphi(a) = b$. Pagal prielaidą visiems $b \in B$ aibės $\varphi^{-1}(b)$ yra netuščios (kitaip φ atvaizduotų A ne į visus aibės B elementus, o į jos tikrinį poaibį). Išrinkime iš kiek-

vienos aibės $\varphi^{-1}(b)$, $b \in B$ po vieną elementą ir visų išrinktų elementų aibę pažymėkime A_1. Iš konstravimo eigos aišku, kad aibės A_1 ir B ekvivalenčios, be to, $A_1 \subset A$. Tai ir reiškia, kad aibėje B elementų yra ne daugiau negu aibėje A.

Šiame įrodyme buvo remiamasi tvirtinimu: kai duota tam tikra aibių visuma, tai, išrinkus iš kiekvienos aibės po vieną elementą, galima sudaryti naują aibę. Šis teiginys atrodo savaime aiškus. Bet, nors taip ir yra, iš jo gaunamos tokios paradoksalios išvados, kad kai kurie matematikai linkę juo nesiremti. Pažymėsime, kad, taikant šį tvirtinimą, vadinamą Cermelo aksioma, galima įrodyti, jog tuo atveju, kai A ir B — bet kurios dvi aibės, tai aibė A ekvivalenti aibės B daliai arba aibė B ekvivalenti aibės A daliai (gali būti ir taip, kad $A \sim B$).

Pratimai

12. Nustatykite abipusiškai vienareikšmę atitiktį tarp natūrinių skaičių aibės N ir lyginių natūrinių skaičių aibės.

13. Nustatykite abipusiškai vienareikšmę atitiktį tarp skaičių tiesės atkarpų $[a, b]$ ir $[c, d]$.

14. Įrodykite, kad plokštumoje taškų yra ne daugiau negu joje yra apskritimų.

15. Įrodykite, kad teigiamų skaičių yra ne daugiau kaip plokštumos apskritimų.

16. Dviem būdais įrodykite, kad kvadrate taškų yra ne mažiau negu kvadrato kraštinėje.

17. Įrodykite, kad tuo atveju, kai aibėje A elementų yra mažiau negu aibėje B, o aibėje B elementų yra mažiau negu aibėje C, tai aibėje A elementų yra mažiau negu aibėje C.

3. Aibės galia. Suskaičiuojamosios aibės. Kaip jau minėjome, *baigtinės* aibės lyginamos: nustatoma abipusiškai vienareikšmė atitiktis tarp jų bei tarp vienos jų ir kitos poaibio arba suskaičiuojami jų elementai. Suskaičiavę elementus, gauname tam tikrą natūrinį skaičių ir, norėdami palyginti aibes, turime palyginti gautuosius skaičius. Be to, visas ekvivalenčias baigtines aibes atitinka vienas ir tas pats natūrinis skaičius. Todėl galima sakyti, kad natūrinis skaičius — tai bendra ekvivalenčių aibių klasės savybė [1]. Remdamiesi šiais samprotavimais, įvesime aibės *galios* sąvoką.

---

[1] Tiesą sakant, toks požiūris į natūrinio skaičiaus sąvoką sudaro sunkumų — be natūrinio skaičiaus sąvokos sunku apibrėžti, kurios aibės yra baigtinės, o kurios — begalinės. Todėl atsiranda ydingas loginis ratas — natūriniai skaičiai apibrėžiami, remiantis baigtinių aibių sąvoka, o baigtinės aibės — remiantis natūriniais skaičiais. Viena galima išeitis — baigtinę aibę apibrėžti kaip aibę, neekvivalenčią jokiai jos tikrinei daliai. Bet ir šiame kelyje atsiranda keblumų. Todėl pirmenybė teikiama aksiominiam natūrinių skaičių apibrėžimui, o baigtinės aibės apibrėžiamos kaip aibės, ekvivalenčios aibei $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Galia vadinama bendra ekvivalenčių viena kitai aibių klasės savybė.

Kitaip tariant, aibės A galia apibrėžiama taip: imame visas aibes, ekvivalenčias aibei A (t. y. tokias, tarp kurių ir A galima nustatyti abipusiškai vienareikšmę atitiktį). Ta bendra savybė, kurią turi visos šios aibės, ir yra aibės A galia. Baigtinių aibių galia sutampa su aibės elementų skaičiumi.

Aibės A galia žymima $|A|$. Sąryšių „tiek pat elementų" ir „elementų ne daugiau negu..." savybes galima parašyti taip:

kai $|A|=|B|$, tai $|B|=|A|$;
kai $|A|=|B|$ ir $|B|=|C|$, tai $|A|=|C|$;
kai $|A|\leqslant|B|$ ir $|B|\leqslant|C|$, tai $|A|\leqslant|C|$;
kai $|A|\leqslant|B|$ ir $|B|\leqslant|A|$, tai $|A|=|B|$.

Aibės, ekvivalenčios natūrinių skaičių aibei N, vadinamos *suskaičiuojamomis*. Kitaip tariant, aibė A yra suskaičiuojama, kai galima nustatyti abipus vienareikšmę atitiktį tarp aibės A ir natūrinių skaičių aibės. Aibės elementą, atitinkantį natūrinį skaičių n, pažymėkime a_n. Tuomet aibės A elementus galima surašyti pagal numerių eilę:

$$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

Taigi aibė A suskaičiuojama tada ir tik tada, kai ji begalinė, be to, jos elementus galima sunumeruoti.

Įrodysime keletą teiginių apie suskaičiuojamas aibes.

1 teorema. **Bet kuris begalinis suskaičiuojamos aibės A poaibis B yra suskaičiuojamas.**

Įrodymas. Kadangi aibė A yra suskaičiuojama, tai jos elementus galima sunumeruoti:

$$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

Kadangi B — aibės A poaibis, tai aibės elementai yra tarp sunumeruotų. Todėl juos galima sunumeruoti iš eilės. Tai ir rodo, kad aibė B suskaičiuojama.

Pavyzdžiui, lyginių natūrinių skaičių aibė — aibės N poaibis. Išrašę lyginius skaičius jų didėjimo tvarka ir sunumeravę juos, tiesiogiai įsitikiname, kad lyginių natūrinių skaičių aibė suskaičiuojama:

skaičiai $2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots$
numeriai $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$.

Apskritai bet kuris begalinis aibės N poaibis suskaičiuojamas. Pavyzdžiui, nelyginių skaičių, pirminių skaičių, natūrinių skaičių kvadratų aibės ir t. t. suskaičiuojamos.

2 teorema. **Bet kuri begalinė aibė A turi suskaičiuojamą poaibį.**

Įrodymas. Kadangi aibė A begalinė, tai ji netuščia. Todėl iš jos galima išrinkti kokį nors elementą. Pažymėkime jį a_1. Li-

kusi aibė $A \setminus \{a_1\}$[1] taip pat netuščia — kitaip aibė A būtų sudaryta iš vieno elemento a_1 ir, aišku, būtų baigtinė. Todėl iš $A \setminus \{a_1\}$ galima išrinkti dar vieną elementą a_2. Toliau taip pat įrodoma, kad iš $A \setminus \{a_1, a_2\}$ galima išrinkti elementą a_3 ir t. t. Tokiu būdu iš aibės A išrinksime suskaičiuojamą poaibį $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$.

Iš 2 teoremos išplaukia, kad bet kurios begalinės aibės galia ne mažesnė kaip suskaičiuojamos aibės galia, todėl **suskaičiuojamos aibės galia — mažiausia tarp begalinių aibių galių.**

Jau įsitikinome, kad suskaičiuojama aibė ekvivalenti savo tikrinei daliai (pavyzdžiui, aibė N ekvivalenti skaičių 10^n aibei). Kadangi bet kuris begalinis poaibis turi suskaičiuojamą poaibį, galime suformuluoti tokią išvadą:

Bet kuri begalinė aibė ekvivalenti savo tikrinei daliai.

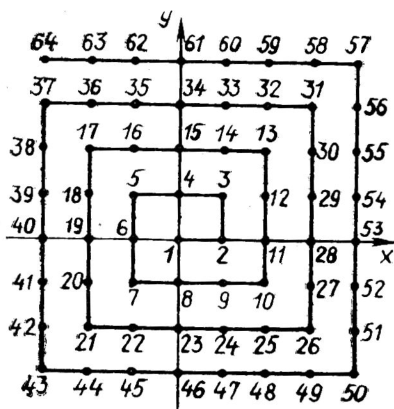
Kadangi nė viena baigtinė aibė negali būti ekvivalenti savo tikrinei daliai, ši savybė būdinga tik begalinėms aibėms.

Išnagrinėkime visų sveikųjų skaičių aibę Z:

$$Z = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

Iš pirmo žvilgsnio atrodo, kad šios aibės neįmanoma sunumeruoti, kad ji nėra suskaičiuojama. Juk jei pradėsime numeruoti nuo nulio, o paskui numeruosime į dešinę, visi neigiamieji skaičiai liks nesunumeruoti. Jei pradėsime numeruoti nuo nulio į kairę, visi teigiamieji skaičiai liks nesunumeruoti. Tačiau sunumeruoti visus šios aibės elementus galima; reikia numeruoti ne viena kryptimi, o visą laiką ją keičiant. Numeriai, kuriuos gaus sveikieji skaičiai, matyti šioje lentelėje.

Skaičiai	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
Numeriai	11	9	7	5	3	1	2	4	6	8	10



4 pav.

Šią numeraciją galima apibrėžti taip: skaičiaus n, kai $n \in N$, numeris lygus $2n$, o skaičiaus $-n$, kai $n \in N$, numeris lygus $2n+1$, o skaičius 0 gauna numerį 1.

Taigi **sveikųjų skaičių aibė yra suskaičiuojama.** 4 paveiksle parodyta, kaip reikia sunumeruoti plokštumos taškų aibę, kai abi taško koordinatės — sveikieji skaičiai. Vadinasi, ir ši aibė yra suskaičiuojama. Tačiau kiekvieną kartą sugalvoti, kaip numeruoti vieną ar kitą aibę, gana sudėtinga. Bendrą

[1] Simbolis $A \setminus B$ reiškia aibę, gautą iš A, pašalinus iš jos aibės B elementus.

daugumos tokių uždavinių sprendimo metodą apibūdina teorema, kurią dabar suformuluosime ir įrodysime.

Skaičių kortežu, kurio ilgis n, pavadinsime bet kokius n neneigiamų sveikų skaičių (nebūtinai skirtingų), surašytus tam tikra tvarka, be to, taip, kad paskutinis skaičius yra nelygus nuliui. Pavyzdžiui, (7) — kortežas, kurio ilgis 1, (12, 25) — kortežas, kurio ilgis 2, (4, 15, 4) — kortežas, kurio ilgis 3, ir t. t. Du skaičių kortežai laikomi lygiais tada ir tik tada, kai kiekvienoje jų vietoje surašyti tie patys skaičiai. Jei bent vienoje vietoje yra skirtingi skaičiai, tai tokie kortežai nelygūs. Pavyzdžiui, $(14, 16, 7, 4) \neq \neq (16, 4, 7, 4)$. Suprantama, du skirtingo ilgio kortežai visada skirtingi.

3 teorema. **Skaičių kortežų aibė S yra suskaičiuojama.**

Įrodymas. Paimkime pirminių skaičių, surašytų jų didėjimo tvarka, seką [1]:

$$2, 3, 5, 7, \ldots .$$

Sunumeruokime šiuos skaičius, t. y. pažymėkime $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$ ir t. t. Kiekvienam skaičių kortežui $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ priskirkime natūrinį skaičių

$$m=p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n} .$$

Pavyzdžiui, kortežui (4, 1, 3) priskiriamas skaičius $2^4 3^1 5^3=6000$. Skirtingus kortežus atitiks skirtingi natūriniai skaičiai. Tarkime, kad kortežai $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ ir $(l_1, l_2, \ldots, l_s)$ yra skirtingi, o juos atitinka vienas ir tas pats skaičius m. Tuomet gautume, kad

$$m=p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}=p_1^{l_1} p_2^{l_2} \ldots p_s^{l_s} ,$$

todėl skaičius m turėtų du skirtingus skaidinius pirminiais dauginamaisiais, o tai negalima.

Kadangi kiekvieną natūrinį skaičių, išskyrus 1, galima išskaidyti pirminiais dauginamaisiais, tai atitiktis $(k_1, k_2, \ldots, k_n) \to \to p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}$ apibrėžia apgręžiamąjį skaičių kortežų aibės atvaizdį į natūrinių skaičių, didesnių už vienetą, aibę. Kadangi ši aibė suskaičiuojama, tai ir aibė S suskaičiuojama.

Norėdami įsitikinti, kad tam tikra begalinė aibė A suskaičiuojama, turime, remdamiesi įrodytąja teorema, kiekvienam šios aibės elementui priskirti skaičių kortežą taip, kad skirtingus elementus atitiktų skirtingi kortežai. Kitaip tariant, kiekvieną aibės elementą reikia „užšifruoti" tam tikru kortežu. Taigi bus nustatyta abipusiškai vienareikšmė atitiktis tarp aibės A ir suskaičiuojamos aibės S poaibio. Kadangi bet kuris begalinis aibės S poaibis suskaičiuojamas, tai ir aibė A suskaičiuojama.

1 pavyzdys. Įrodysime, kad teigiamų trupmenų aibė suskaičiuojama.

---

[1] Žinome, kad pirminių skaičių aibė begalinė.

Kiekviena trupmena $\frac{m}{n}$ apibrėžiama kortežu (m, n), kurio ilgis 2, be to, skirtingas trupmenas atitinka skirtingi kortežai. Vadinasi, trupmenų aibė suskaičiuojama.

2 pavyzdys. Įrodysime, kad visų trupmenų aibė suskaičiuojama.

Kiekvieną trupmeną $\pm\frac{m}{n}$ galima apibrėžti kortežu (k, m, n), kurio ilgis 3; čia $k=1$, kai trupmena teigiama, ir $k=2$, kai trupmena neigiama. Vadinasi, visų trupmenų aibė suskaičiuojama.

3 pavyzdys. Įrodysime, kad kvadratinių lygčių, kurių koeficientai natūriniai, aibė suskaičiuojama.

Iš tikrųjų, lygtį $ax^2+bx+c=0$, kai a, b, c — natūriniai skaičiai, galima apibrėžti skaičių kortežu (a, b, c). Todėl ji suskaičiuojama.

Įrodyti, kad kvadratinių lygčių aibė suskaičiuojama, kai šių lygčių koeficientai sveikieji skaičiai, šiek tiek sudėtingiau.

Iš 3 teoremos išplaukia viena naudinga išvada.

Išvada. Suskaičiuojamų aibių baigtinės arba suskaičiuojamos sistemos sąjunga suskaičiuojama.

Įrodymas. Iš pradžių išnagrinėkime atvejį, kai duotosios aibės poromis neturi bendrų elementų. Kadangi aibių visuma suskaičiuojama, jas galima sunumeruoti: $A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots$ (atvejis, kai bendras aibių skaičius baigtinis, nagrinėjamas analogiškai). Kiekviena aibė A_m suskaičiuojama, todėl ir jos elementus galima sunumeruoti. Kiekvienam elementui duosime „šifrą“, sudarytą iš dviejų skaičių, pirmasis skaičius — aibės numeris, antrasis — elemento numeris šioje aibėje:

$$A_1=\{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots\},$$
$$A_2=\{a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots\},$$
$$A_m=\{a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}, \ldots\},$$

. . . .

Kiekvienas šių aibių sąjungos $A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup\ldots$ elementas a_{mn} numeruojamas skaičių kortežu (m, n). Kadangi tokių kortežų aibė suskaičiuojama, tai ir aibė A suskaičiuojama.

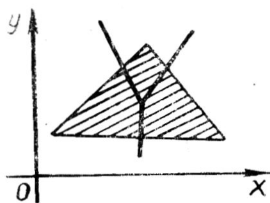
Kai aibės $A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots$ gali turėti bendrų elementų, kiekvieną A elementą atitiks ne vienas, o keli kortežai (tiek, kelioms aibėms jis priklauso). Todėl egzistuoja kortežų (m, n) suskaičiuojamos aibės S atvaizdis į aibę A. Vadinasi, aibė A suskaičiuojama[1].

---

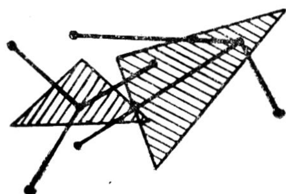
[1] Tiesa, tvirtinimą „Kai egzistuoja suskaičiuojamos aibės A atvaizdis į beginę aibę B, tai B suskaičiuojama“ galima įrodyti, nesiremiant Cermelo aksioma (žr. p. 168). Pakanka kiekvienam B elementui b priskirti skaičių, lygų elementų, atvaizduojamų į b, mažiausiam numeriui (pavyzdžiui, kai į b atvaizduojami elementai a_5, a_8, a_{11}, tai jis gauna numerį 5). Tuo pačiu bus apibrėžtas apgręžiamasis B atvaizdis į N, todėl aibė B suskaičiuojama.



5 pav.



6 pav.



7 pav.

Analogiškai įrodoma, kad **baigtinių aibių baigtinės arba suskaičiuojamos aibės sąjunga yra baigtinė arba suskaičiuojama aibė** (kartais gali būti, kad baigtinių aibių suskaičiuojamos visumos sąjunga yra baigtinė aibė; pavyzdžiui, kai visos šios aibės vienodos).

Kartais, įrodinėjant, kad aibė suskaičiuojama, tenka griebtis sudėtingesnių konstrukcijų. Sankryža pavadinsime trijų atkarpų, išeinančių iš vieno taško, visumą (5 pav.). Įrodysime, kad bet kuri poromis nesikertančių plokštumos sankryžų aibė yra ne daugiau kaip suskaičiuojama. Plokštumoje imkime koordinačių sistemą ir kiekvienai sankryžai priskirkime trikampį, kurio visų viršūnių koordinatės racionalios, o kiekviena kraštinė kerta vieną ir tik vieną sankryžos atkarpą (6 pav.). Iš 3 teoremos išplaukia, kad tokių trikampių aibė suskaičiuojama. Bet nesunku įrodyti, kad nesusikertančias sankryžas atitinka skirtingi trikampiai (7 pav.). Todėl poromis nesikertančių sankryžų aibė suskaičiuojama.

Pratimai

18. Įrodykite, kad šios aibės suskaičiuojamos:

a) plokštumos taškų, kurių abi koordinatės — lyginiai skaičiai;

b) plokštumos taškų, kurių abi koordinatės — nelyginiai skaičiai;

c) tiesinių lygčių, kurių koeficientai — sveikieji skaičiai;

d) dešimtainių trupmenų;

e) kubinių lygčių, kurių koeficientai — natūriniai skaičiai;

f) racionaliųjų skaičių;

g) lygčių $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, kurių koeficientai — sveikieji skaičiai;

h) plokštumos taškų, kurių koordinatės — racionalieji skaičiai;

i) trikampių, kurių visų viršūnių koordinatės racionaliosios;

j) poromis nesikertančių aštuoniukių plokštumoje.

4. Nesuskaičiuojamos aibės. Visos begalinės aibės, kurias iki šiol nagrinėjome, buvo suskaičiuojamos. Todėl kyla klausimas, ar yra nesuskaičiuojamų begalinių aibių, o gal visos begalinės



8 pav.

aibės suskaičiuojamos. Pateiksime nesuskaičiuojamos begalinės aibės pavyzdį. Įrodysime, kad bet kurios atkarpos taškų aibė nesuskaičiuojama. Visų pirma suformuluosime tvirtinimą, kurio prireiks įrodant.

Tarkime, kad $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \ldots$ — seka atkarpų, kurių kiekviena yra pirmesnės dalis. Tuomet šios atkarpos turi bent vieną bendrą tašką.

Šio tvirtinimo prasmė aiški iš 8 paveikslo. Jis išreiškia tiesės *tolydumo* savybę. Mat, jei iš tiesės pašalintume bent vieną tašką, galėtume sukonstruoti viena kitoje patalpintų atkarpų seką, kurių sankirta būtų tuščia aibė (pakanka paimti atkarpas, kurių centras pašalintame taške, o ilgiai lygūs 1, 1/2, 1/4, 1/8 ir t. t.; tokių atkarpų sankirta turėtų būti taškas a, o jis pašalintas). Taigi suformuluotas tvirtinimas reiškia, kad iš tiesės nepašalintas nė vienas taškas, kad tiesė tolydi.

Tarkime, kad atkarpos Δ taškų aibė suskaičiuojama. Tuomet juos galima sunumeruoti $\Delta = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Padalykime dabar atkarpą Δ į tris vienodo ilgio dalis: Δ_1', Δ_1'', Δ_1'''. Taškas a_1 priklauso arba tik vienai kuriai nors daliai, arba dviem tokioms dalims (kai jis sutampa su vienu dalijimo tašku). Esame tikri, kad visada bus dalis, kuriai šis taškas nepriklausys. Pažymėkime šią dalį Δ_1 ir vėl padalykime ją į tris vienodo ilgio dalis. Tuomet bent vienoje dalyje nebus taško a_2. Pažymėkime tą dalį Δ_2. Pratęsę šį procesą, gauname atkarpų seką

$$\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \ldots,$$

kurios kiekvienai atkarpai priklauso po jos einanti atkarpa, be to, koks bebūtų n, atkarpai Δ_n nepriklauso taškas a_n. Bus bent vienas taškas a, priklausantis visoms atkarpoms Δ_n. Parodysime, kad jis nesutampa nė su vienu tašku $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Iš tikrųjų, jei jis sutaptų su a_n, tai a nepriklausytų atkarpai Δ_n, o juk taškas a parinktas taip, kad jis priklausytų visoms atkarpoms.

Taigi taškas a nesutampa në su vienu tašku $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Bet pagal prielaidą atkarpoje Δ nėra jokių kitų taškų, kaip $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, todėl a nepriklauso šiai atkarpai, o tai prieštarauja šio taško konstravimui. Gautas prieštaravimas rodo, kad prielaida, jog galima sunumeruoti visus atkarpos taškus, neteisinga, t. y. ši aibė nesuskaičiuojama.

Pateiksime dar vieną nesuskaičiuojamos aibės pavyzdį. Išnagrinėkime visų begalinių sekų, sudarytų iš nulių ir vienetų, aibę, pavyzdžiui:

01010101 . . . .
101001000100001 . . . . . .

Įrodysime, kad ši aibė nesuskaičiuojama. Tarkime, kad visas sekas galime sunumeruoti:

$$\alpha_1 = a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n}\ \ldots$$
$$\alpha_2 = a_{21}\ a_{22}\ \ldots\ a_{2n}\ \ldots$$
$$\alpha_m = a_{m1}\ a_{m2}\ \ldots\ a_{mn}\ \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Čia simboliu a_{mn} pažymėta sekos α_m n-tasis skaitmuo ($a_{mn}=0$ arba 1). Sukonstruokime naują seką

$$\beta = b_1 b_2\ \ldots\ b_m\ \ldots$$

pagal tokią taisyklę: kai $a_{mm}=0$, tai $b_m=1$, o kai $a_{mm}=1$, tai $b_m=0$.

Įsitikinsime, kad seka β nesutampa nė su viena seka α_m, t. y. ji negauna jokio numerio. Iš tikrųjų, jei būtų $\beta=\alpha_m$, sekos β ir α_m visi elementai būtų vienodi. Bet jos skiriasi elementu, esančiu m-toje vietoje: sekoje β šioje vietoje parašytas skaitmuo b_m, o sekoje α_m — skaitmuo a_{mm}. O seką β konstravome taip, kad būtų $b_m \neq a_{mm}$. Taigi seka β neturi numerio, todėl prielaida, kad galima sunumeruoti visus sekos narius, klaidinga.

Pratimai

19. Įrodykite, kad kvadrato taškų aibė nesuskaičiuojama.

20. Įrodykite, kad apskritimo taškų aibė nesuskaičiuojama.

21. Įrodykite, kad begalinių sekų, sudarytų iš skaitmenų 0, 1 ir 2, aibė nesuskaičiuojama.

5. Realiųjų skaičių aibė. Atkarpos taškų aibė, o tuo labiau visos tiesės taškų aibė yra nesuskaičiuojama. Tuo tarpu racionaliųjų skaičių aibė Q suskaičiuojama (žr. 18 pratimą). Todėl tarp aibės Q ir tiesės taškų aibės nėra abipusiškai vienareikšmės atitikties. Kitaip tariant, tiesės taškų, kurių koordinatės racionalieji skaičiai, aibė sudaro tik visos tiesės taškų aibės dalį. Norėdami kiekvienam tiesės taškui priskirti skaičių — jo koordinatę, turime praplėsti racionaliųjų skaičių aibę Q ir įvesti naujus skaičius. Juos vadinsime realiaisiais skaičiais, o realiųjų skaičių aibę žymėsime R.

Realiųjų skaičių teorija bus nagrinėjama IX klasėje. Šioje knygoje pateiksime tik tuos šios teorijos fragmentus, kurių prireiks dabar.

Bet kurį realųjį skaičių galima išreikšti begaline dešimtaine trupmena, t. y. reiškiniu

$$\pm A,\ a_1\ \ldots\ a_n\ \ldots\ ;$$

čia A — natūrinis skaičius arba nulis, $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ įgyja reikšmes 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, pavyzdžiui:

$$\pi = 3{,}14159\ldots,$$
$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots,$$
$$-\frac{1}{2} = -0{,}5000\ldots.$$

Be to, skirtingi realieji skaičiai išreiškiami skirtingai užrašytomis dešimtainėmis trupmenomis, o kiekvienas skaičius apskritai turi tik vieną užrašą. Išimtį sudaro skaičiai, kurių užrašas baigiasi nulių seka (pavyzdžiui, 0,2500000...). Jei šiame užraše paskutinį nelygų nuliui skaitmenį sumažintume vienetu, o visus po jo einančius nulius pakeistume devynetais, tai gautume naują begalinę dešimtainę trupmeną, išreiškiančią tą patį skaičių, kokį išreiškia trupmena, kuri baigiasi nulių seka, pavyzdžiui:

$$0{,}2500000\ldots = 0{,}2499999\ldots.$$

Be to, dešimtainės trupmenos 0,000... ir −0,000... apibrėžia vieną ir tą patį skaičių — nulį.

Realieji skaičiai, turintys užrašą $A, a_1 \ldots a_n \ldots$, kurio bent vienas skaitmuo nelygus nuliui, vadinami teigiamais, o skaičiai, turintys užrašą $-A, a_1 \ldots a_n \ldots$, — neigiamais. Kai yra parinktas ilgio vienetas (t. y. fiksuota tam tikra atkarpa), kiekvieną atkarpą AB atitinka teigiamas realusis skaičius — šios atkarpos ilgis, matuojamas ilgio vienetu.

Atvirkščiai, kai duotas tam tikras teigiamas realusis skaičius α, tai egzistuoja atkarpa, kurios ilgis lygus α.

Dabar jau nesunku nustatyti **abipusiškai vienareikšmę atitiktį tarp realiųjų skaičių aibės *R* ir tiesės taškų aibės.** Tuo tikslu pažymime tiesėje tašką O — koordinačių pradžią, parenkame kryptį ir ilgio vienetą. Kiekvienam taškui priskiriame skaičių α, lygų atkarpos OA ilgiui, kai kryptis iš O į A yra teigiama, ir lygų tam pačiam ilgiui su minuso ženklu priešingu atveju. Iš to išplaukia, kad ši atitiktis yra abipusiškai vienareikšmė.

Pratimai

22. Ar galima realųjį skaičių išreikšti trimis skirtingai užrašomomis begalinėmis dešimtainėmis trupmenomis?

23. Įrodykite, kad begalinės dešimtainės trupmenos visi skaitmenys, pradedant tam tikru skaitmeniu, yra devynetai, kai visi šios trupmenos artiniai su pertekliumi, pradedant n-tuoju, sutampa.

24. Ar yra didžiausias skaičius, mažesnis už 0,9 ir užrašomas be skaitmenų 8 ir 9?

25. Ar yra didžiausias skaičius, mažesnis už 1 ir užrašomas be skaitmenų 7 ir 8?

26. Sukonstruokite didžiausią realųjį skaičių, mažesnį už 0,9, kurio dešimtainiame užraše nebūtų skaitmens 9.

27. Apibūdinkite koordinačių tiesės taškų, esančių tarp 0 ir 1, aibę, kai dešimtainio šių taškų užrašo pirmieji trys skaitmenys po kablelio nelygūs 5.

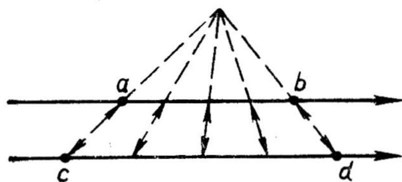
28. Įrodykite, kad skaičių, kurių užrašas baigiasi nulių seka, aibė suskaičiuojama.

6. Kontinumo galios aibė. Kai aibė A ekvivalenti atkarpos $[0;\ 1]$ taškų aibei, sakoma, kad ji turi kontinumo galią (lotyniškai „continuum" — nepaliaujamas, tolydus). Įrodysime, kad **bet kurios atkarpos taškų aibė turi kontinumo galią.** Įrodysime netgi daugiau, būtent: yra abipusiškai vienareikšmė atitiktis tarp atkarpų $[a,\ b]$ ir $[c,\ d]$ taškų. 9 paveiksle pavaizduota, kokiu būdu nustatoma ši atitiktis.

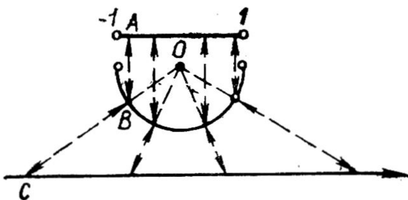
Dabar įrodysime, kad **atviro intervalo $]0;\ 1[$ taškų aibė turi kontinumo galią.** Tuo tikslu parinkime šiame intervale taškų seką $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$. Pažymėkime $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=0$, $\varphi\left(\frac{1}{3}\right)=1$, $\varphi\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$, $\varphi\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{3}, \ldots, \varphi\left(\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{n}, \ldots$ ir $\varphi(x)=x$, kai x — intervalo $]0;\ 1[$ taškas, neturintis išraiškos $\frac{1}{n}$. Taip gavome intervalo $]0;\ 1[$ abipusiškai vienareikšmį atvaizdį į atkarpą $[0;\ 1]$. Todėl ir intervalas $]0;\ 1[$ turi kontinumo galią.

Analogiškai įrodoma, kad bet kuris intervalas $]a;\ b[$ turi kontinumo galią. Tokią pat galią turi ir pusiau atviri intervalai $[a;\ b[$ ir $]a;\ b]$.

Dabar įrodysime, kad **bet kuri tiesė turi kontinumo galią.** Reikia nustatyti abipusiškai vienareikšmę atitiktį tarp visos tiesės ir kurio nors atviro intervalo. 10 paveiksle pavaizduota, kaip nustatoma tokia atitiktis — iš pradžių intervalo $]-1;\ 1[$ taškui A priskiriame po juo esantį pusapskritimio tašką B, o paskui taškui B priskiriame tašką C, esantį spindulyje OC ir tiesėje (O — pusapskritimio centras).

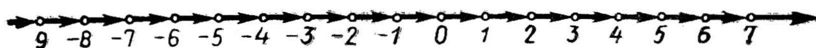


9 pav.



10 pav.

Kadangi tiesę galima suskaidyti į poromis nesikertančius pusiau atvirus intervalus $[n;\ n+1[$ (11 pav.), kurių kiekvienas, kaip ir visa tiesė, turi kontinumo galią, tai bus teisinga tokia teorema.



11 pav.

2 teorema. **Suskaičiuojamos visumos aibių, turinčių kontinumo galią, sąjunga turi tą pačią galią.**

Dar nuostabesnis yra toks tvirtinimas.

3 teorema. **Kvadrato taškų aibė turi kontinumo galią.**

Šis tvirtinimas reiškia, kad kvadratas susideda iš tiek taškų, kiek jų yra atkarpoje, nors iš pirmo žvilgsnio atrodo, kad kvadrate jų turi būti daugiau. Bet jau žinome, kad begalinėms aibėms taisyklė „Objekto dalis mažesnė už visą objektą" negalioja.

Teorema įrodoma taip. Kvadrato taškų aibė suskaidoma į dvi aibes, sudarytas iš jo kontūro ir vidinių taškų. Aišku, kad kvadrato kontūras, sudarytas iš keturių atkarpų, turi kontinumo galią. Liko įrodyti, kad tokią pat galią turi kvadrato vidinių taškų aibė.

Apibrėžtumo dėlei imkime koordinačių plokštumos kvadratą, turintį viršūnes $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 0)$, $C(1;\ 1)$, $D(0;\ 1)$ (12 pav.). Kiekvieną vidinį kvadrato tašką M apibrėšime jo koordinatėmis x ir y. Jos turi išraišką

$$x=0,\ x_1x_2\ \ldots\ x_n\ \ldots,$$
$$y=0,\ y_1y_2\ \ldots\ y_n\ \ldots;$$

čia x_n ir y_n įgyja reikšmes 0, 1, 2, ..., 9. Be to, kai skaičiai x ir y turi po du užrašus begalinėmis dešimtainėmis trupmenomis, parenkamas užrašas, kuriame nėra begalinės devynetų aibės.

Taškui M priskirkime realųjį skaičių, turintį užrašą

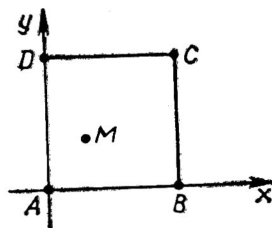
$$z=0,\ x_1y_1x_2y_2\ \ldots\ x_ny_n\ \ldots$$

(t. y. maišome skaičių x ir y dešimtainius ženklus). Pavyzdžiui, kai

$$x=0{,}261803\ \ldots,$$
$$y=0{,}048950\ \ldots,$$

tai

$$z=0{,}206418890530\ \ldots.$$



12 pav.

Nesunku patikrinti, kad tuomet skirtingus taškus atitiks skirtingi skaičiai. Iš tikrųjų, kai taškai M ir N yra skirtingi, jų koordinatės skiriasi bent viename dešimtainiame ženkle, o tuomet atitinkantys juos realieji skaičiai irgi skirtingi.

Taigi atvaizdis $M(x,\ y)\rightarrow z$ apgręžiamasis, todėl kvadrato viduje taškų yra ne daugiau negu realiųjų skaičių, t. y. vidinių

kvadrato taškų aibės galia ne didesnė už kontinuumo galią. Bet aišku, kad ji ne mažesnė už šią galią (bent jau todėl, kad kvadrato viduje yra atkarpa), todėl jai lygi. Bet tuomet ir visų kvadrato taškų aibė turi kontinumo galią.

Tą pačią galią turi skritulio, kubo ir apskritai bet kurios geometrinės figūros, turinčios bent vieną atkarpą, taškų aibė.

Pratimai

29. Nustatykite abipusiškai vienareikšmę atitiktį tarp skritulio ir kvadrato taškų.

30. Nustatykite abipusiškai vienareikšmę atitiktį tarp kubo taškų ir tam tikro realiųjų skaičių aibės poaibio.

31. Nurodykite, kurie realieji skaičiai nėra vidinių kvadrato taškų vaizdai, gauti aukščiau aprašytu atvaizdžiu.

32. Įrodykite, kad realiųjų skaičių begalinių sekų

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

aibė turi kontinumo galią.

7. Iracionalieji skaičiai. Algebriniai ir transcendentieji skaičiai. Visi realieji skaičiai, kurie nėra racionalieji, vadinami *iracionaliaisiais*. Štai keli tokių skaičių pavyzdžiai: $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{6}$, $4+\sqrt[5]{7,1}$, π^2 ir t. t. Galima įrodyti, kad racionalieji skaičiai išreiškiami periodinėmis dešimtainėmis trupmenomis, t. y., pradedant tam tikra vieta, jų dešimtainiame užraše kartojasi ta pati skaitmenų grupė:

$$\frac{1}{6}=0{,}1666666\ldots,$$

$$\frac{1}{7}=0{,}142857142857142857\ldots.$$

Iracionaliųjų skaičių užrašas *neperiodinis*. Pavyzdžiui, skaičius 0,10 100 1000 10000 1000001 ... yra iracionalusis: jame iš pradžių po vieneto yra vienas nulis, paskui du nuliai, paskui trys nuliai, paskui keturi nuliai ir t. t. Iracionaliųjų skaičių aibė nesuskaičiuojama. Iš tikrųjų, jei ji būtų suskaičiuojama, tai ir visa realiųjų skaičių aibė, kaip dviejų suskaičiuojamų aibių sąjunga, būtų suskaičiuojama, o taip nėra. Galima įrodyti, kad iracionaliųjų skaičių aibės galia tokia pati, kaip ir realiųjų skaičių aibės, t. y. ji yra kontinumo galios aibė. Vadinasi, iracionaliųjų skaičių žymiai „daugiau" negu racionaliųjų.

Racionalusis skaičius $\frac{3}{5}$ yra šaknis pirmojo laipsnio lygties $5a-3=0$, kurios koeficientai — sveikieji skaičiai. Atvirkščiai, kiekvienos lygties $ax-b=0$, kurios koeficientai a ir b yra sveikieji skaičiai, $a\neq 0$, šaknis yra racionalusis skaičius. Skaičius $\sqrt{3}$ iracionalusis, todėl jis netinka jokiai pirmojo laipsnio lygčiai, kurios

koeficientai — sveikieji skaičiai. Bet jis tinka kvadratinei lygčiai $x^2-3=0$, turinčiai sveikus koeficientus. Apskritai, koks bebūtų skaičius, sudarytas iš sveikųjų skaičių, sudėtimi, daugyba, dalyba ir šaknies traukimu galima rasti lygtį

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0,\ a_0\neq 0, \tag{1}$$

turinčią sveikus koeficientus, kurios šaknis jis yra.

Apibrėžimas. **Skaičius α vadinamas algebriniu, kai jis yra (1) lygties, kurios visi koeficientai — sveikieji skaičiai, $a_0\neq 0$, šaknis. Nealgebriniai skaičiai vadinami transcendenčiaisiais.**

Taigi visi skaičiai, kurie gaunami iš sveikųjų skaičių, atliekant aritmetinius ir šaknies traukimo veiksmus, yra algebriniai. Tačiau algebrinių skaičių aibei priklauso ne vien tokie skaičiai. Pavyzdžiui, lygties $x^5-3x+1=0$ šaknys — algebriniai skaičiai, bet išreikšti juos skaičiais, gautais minėtais veiksmais iš sveikųjų skaičių, neįmanoma.

Nagrinėjant skritulio kvadratūros uždavinį (kvadrato, lygiapločio duotajam skrituliui, braižymas skriestuvu ir liniuote), iškilo klausimas, ar skaičius π algebrinis, t. y. ar galima parašyti su sveikais koeficientais lygtį, kuriai jis tiktų? Bet iš pradžių reikia išsiaiškinti, ar tikrai egzistuoja transcendentieji skaičiai. Gal visi realieji skaičiai algebriniai?

Prancūzų matematikas Liuvilis gana originaliai sugalvojo pirmuosius transcendenčiųjų skaičių pavyzdžius. Vokiečių matematikas Lindemanas 1882 m. įrodė, kad skaičius π yra transcendentyvusis. Tai buvo svarbus įvykis moksle: iš šio įrodymo išplaukė, kad skritulio kvadratūra negalima. Drauge buvo įrodyta, kad uždavinys, kuriuo matematikai domėjosi ilgiau kaip du tūkstančius metų, neišsprendžiamas.

Sukūrus aibių teoriją, kyla klausimas: kurių skaičių daugiau — algebrinių ar transcendenčiųjų? Pasirodė, kad algebrinių skaičių aibė suskaičiuojama, t. y. juos galima sunumeruoti. Tai išplaukia iš to, kad lygčių su sveikais koeficientais aibė suskaičiuojama, o kiekviena tokia lygtis turi tik baigtinį kiekį šaknų (n-tojo laipsnio lygtis turi ne daugiau kaip n šaknų). Vadinasi, algebrinių skaičių aibė yra baigtinių aibių suskaičiuojamos aibės sąjunga, todėl ji suskaičiuojama. Transcendentinių skaičių aibė turi kontinumo galią. Taigi jų yra daugiau negu algebrinių. Vis dėlto net ir šiandien gana sunku įrodyti, kad vienos ar kitos rūšies skaičiai yra transcendentieji. Šioje srityje daug pasiekė tarybinis matematikas A. Gelfondas. Jis įrodė, pavyzdžiui, kad skaičiai $2^{\sqrt{2}}$, $7^{\sqrt[3]{5}}$ ir t. t. yra transcendentieji.

8. Nėra aibės, turinčios didžiausią galią *. Kol kas nežinome aibių, kurių galia būtų didesnė už kontinumo galią. Kyla klau-

simas: ar yra tokių aibių ir kaip jas sukonstruoti? Norėdami išspręsti šį klausimą, priminsime, kad visų sekų, sudarytų iš nulių ir vienetų, aibė turi kontinuumo galią, todėl yra nesuskaičiuojama (žr. p. 174). Bet seka iš nulių ir vienetų yra funkcija, apibrėžta suskaičiuojamoje natūrinių skaičių aibėje, kuri įgyja dvi reikšmes: 0 ir 1. Pavyzdžiui, seką $\alpha=1010010001\ldots$ galima apibrėžti taip: $\alpha(1)=1$ (t. y. pirmasis skaitmuo lygus 1), $\alpha(2)=0$, $\alpha(3)=1$, $\alpha(4)=0$, $\alpha(5)=0$, $\alpha(6)=1$ ir t. t.

Tai rodo, kaip galima sukonstruoti aibę, kurios galia būtų didesnė už kontinuumo galią. Reikia paimti kokią nors kontinuumo galios aibę X (pavyzdžiui, visų realiųjų skaičių aibę) ir Y pažymėti aibę visų funkcijų, apibrėžtų aibėje X ir įgyjančių reikšmes 0 ir 1. Tokių funkcijų pavyzdžiai:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{kai } x<2,\\ 1, & \text{kai } x\geqslant 2,\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{kai } x \text{ racionalusis},\\ 1, & \text{kai } x \text{ iracionalusis ir t. t.}\end{cases}$$

Pasirodo, kad **aibės Y galia didesnė už kontinuumo galią.** Norėdami tai įrodyti, turime įrodyti du tvirtinimus.

a) Egzistuoja abipusiškai vienareikšmė atitiktis tarp aibės X ir tam tikro aibės Y poaibio Y_1.

b) Nėra abipusiškai vienareikšmės atitikties tarp aibių X ir Y.

Pirmasis tvirtinimas įrodomas nesunkiai. Reikia kiekvienam realiajam skaičiui α priskirti funkciją f^{α}, apibrėžiamą taip:

$$f^{\alpha}(x)=\begin{cases}0, & \text{kai } x\neq\alpha,\\ 1, & \text{kai } x=\alpha.\end{cases}$$

Kadangi ši funkcija įgyja tik reikšmes 0 ir 1, tai ji priklauso aibei Y. Be to, aišku, kad funkcijos f^{α} ir f^{β} yra skirtingos, kai $\alpha\neq\beta$. Iš tikrųjų, $f^{\alpha}(\alpha)=1$, o $f^{\beta}(\alpha)=0$, todėl funkcijos f^{α} ir f^{β} viena su kita nesutampa. Iš to išplaukia, kad atitiktis $\alpha\to f^{\alpha}$ yra apgręžiamasis X atvaizdis aibėje Y. Vadinasi, aibėje X elementų yra ne daugiau kaip aibėje Y. Taigi a) tvirtinimas įrodytas.

Dabar įrodysime b) tvirtinimą. Taikysime prieštaravimo metodą: tarkime, kad tarp aibių X ir Y egzistuoja abipusiškai vienareikšmė atitiktis. Funkciją, atitinkančią skaičių α, pažymėsime f_{α}. Sudarysime naują funkciją φ, pažymėję

$$\varphi(x)=1-f_{x}(x).$$

Vadinasi, norėdami rasti funkcijos φ reikšmę, kai $x=\alpha$, turime iš pradžių rasti funkciją f_{α}, atitinkančią skaičių α, rasti šios funkcijos reikšmę $f_{\alpha}(\alpha)$, kai $x=\alpha$, ir gautąją reikšmę atimti iš vieneto. Aišku, kad tokiu būdu gautas skirtumas lygus arba nuliui, arba vienetui ($1-0=1$, $1-1=0$), todėl funkcija φ priklauso aibei Y.

Pagal prielaidą $\alpha \rightarrow f_\alpha$ tarp aibių X ir Y yra abipusiškai vienareikšmė atitiktis. Kadangi $\varphi \in Y$, tai turi būti toks skaičius β, su kuriuo $\varphi = f_\beta$, t. y. su visais $x \in X \varphi(x) = f_\beta(x)$. Kadangi $\varphi(x) = 1 - f_x(x)$, tai gauname

$$1 - f_x(x) = f_\beta(x),$$

iš čia $f_\beta(\beta) = \frac{1}{2}$. Tai prieštarauja sąlygai, kad funkcija f įgyja tik 0 ir 1 reikšmes. Gautas prieštaravimas įrodo, kad prielaida klaidinga: abipusiškai vienareikšmės atitikties tarp aibių X ir Y negali būti.

Taigi **visų funkcijų f, apibrėžtų realiųjų skaičių aibėje ir įgyjančių reikšmes 0 ir 1, aibės galia pasirodė esanti didesnė už kontinumo galią.** Galima įrodyti, kad tokią pat galią turi aibė visų funkcijų apibrėžtų aibėje X ir įgyjančių bet kurias realias reikšmes. Norėdami gauti dar didesnę galios aibę, turime paimti aibę funkcijų, apibrėžtų aibėje Y ir įgyjančių reikšmes 0 ir 1. Apskritai, norėdami gauti aibę, kurios galia būtų didesnė už tam tikros aibės A galią, turime paimti aibę funkcijų f, apibrėžtų aibėje A ir įgyjančių reikšmes 0 ir 1. Kadangi, kokia bebūtų aibė, galima sukonstruoti dar didesnės galios aibę, tai didžiausios galios aibės nėra.

9. Istorinės žinios. Aibių teorijos idėjos matematikoje brendo per visą XIX a. Didysis vokiečių matematikas Karlas Gausas, gvildendamas XIX a. pradžioje skaičių teorijos klausimus, savo darbuose rėmėsi aibėmis, sudarytomis iš sveikųjų skaičių (aibė skaičių, kurie, dalijami iš n, duoda tam tikrą liekaną, aibė skaičių, kuriuos galima išreikšti dviejų sveikųjų skaičių kvadratų suma ir t. t.). Tokios aibės turėjo didelės įtakos vokiečių matematikų E. Kumerio, R. Dedekindo ir kt., kurie XIX a. viduryje toliau plėtojo skaičių teoriją, darbams. Antra vertus, geometrijoje, tiriant geometrines transformacijas, atsirado abipusiškai vienareikšmės atitikties sąvoka. Bendra išraiška šią sąvoką nagrinėjo čekų matematikas ir filosofas Bernardas Bolcanas.

Ypač reikšmingas, toliau plėtojant aibių teoriją, buvo funkcijų tyrimas — jų trūkio taškų aibės ieškojimas ir t. t. Galutinai begalinių aibių teoriją, kaip savarankišką matematikos šaką, savo darbais suformavo XIX a. antroje pusėje įžymus vokiečių matematikas Georgas Kantoras. Kantoras yra begalinių aibių teorijos svarbiausių sąvokų ir teoremų autorius. Jis įvedė aibės galios, suskaičiuojamos aibės, kontinumo galios aibės sąvokas, įrodė, kad racionaliųjų skaičių aibė suskaičiuojama, suskaičiuojamų aibių teoremas, kontinumo nesuskaičiuojamumo ir atkarpos ekvivalentumo kvadratui teoremas.

Begalinių aibių teorijos sukūrimas padarė milžinišką įtaką visam tolesniam XX a. matematikos plėtojimui. Dauguma šiuolaikinės matematikos sričių (topologija, bendroji algebra, funkciona-

linė analizė) ištisai remiasi aibių teorijos sąvokomis, daugelis klasikinių krypčių (pavyzdžiui, geometrija, tikimybių teorija) buvo pertvarkytos iš naujo aibių teorijos pagrindu.

Reikšmingą darbą atliko, plėtojant aibių teoriją, rusų ir tarybiniai matematikai — N. Luzinas, D. Jegorovas, P. Aleksandrovas, A. Kolmogorovas, P. Novikovas ir kt. Daug svarbių rezultatų aibių teorijoje gavo lenkų mokslininkai V. Serpinskis, K. Kuratovskis, S. Banachas ir kt.

Skaičiavimo sistemos ir aritmetiniai ESM pagrindai

7. Apvalus skaičius turi dalytis iš n, o visai apvalus — iš n^2.

9. Kai skaičiavimo sistemos pagrindas lyginis, tai skaičius lyginis tada ir tik tada, jei jis baigiasi lyginiu skaitmeniu. Kai pagrindas nelyginis, lyginiame skaičiuje turi būti lyginis kiekis nelyginių skaitmenų.

15. a) 1101; b) 1124; c) 2402; d) 3042.
16. a) 7301; b) 3207; c) 2466; d) 7335.
17. 3564; 2577; 1720.
18. 16235; 14352; 11435.
20. 0,84375; 0,8125; 0,552.
21. 0,791015625; 0,998046875; 0,5078125.
22. 0,65; 0,75; 1,35; 15,634; 651,42; 1733,72.

24. Trupmeną galima išreikšti baigtine dešimtaine trupmena, kai jos vardiklio skaidinyje pirminiais dauginamaisiais nėra kitokių dauginamųjų kaip 2 ir 5; baigtine aštuonetaine, kai vardiklio skaidinyje nėra kitokių pirminių dauginamųjų kaip 2.

25. Trupmena bus baigtinė, jei pirminiai jos vardiklio dalikliai bus skaičiavimo sistemos pagrindo dalikliai.

26. 182,8125.
27. 111010011; 10101.
28. a) 10000011001; b) 10000100100111011; c) 110000011.
29. 110111100.
30. $7246_8 = 111010100110_2$; $7616_8 = 111110001110_2$.
33. a) 6580; b) 307; c) 895678; d) ABC.
34. $16960{,}58_{16} = 10110100111000000{,}01011_2$.

Simetrija

4. Norėdami rasti tašką O_1, imame du bet kuriuos taškus M ir N ir nuosekliais poslinkiais gauname taškus M' ir N'. Taškas O_1 yra vidurio statmenų atkarpų MM' ir NN' susikirtimo taškas.

5. Įsidėmėkite, kad, nuosekliai atlikę dvi ašines simetrijas, gauname arba lygiagretųjį postūmį, arba posūkį.

19. Vienas galimas šio uždavinio sprendimo būdas toks: iš pradžių braižome kvadratą, kurio dvi viršūnės yra tiesėje, o trečia — vienoje kampo kraštinėje. Nubraižykite kelis tokius kvadratus ir sugalvokite, kokia jų ketvirtųjų viršūnių aibė.

20. Vieną apskritimų atvaizduokite tiesės atžvilgiu.

21. Tarę, kad uždavinys išspręstas, vieną keturkampio „pusę" atvaizduokite pusiaukampinės atžvilgiu.

22. Visų pirma išsiaiškinkite, kas atsitinka, kai rutulys atsimuša nuo stalo sienelės. Tuo tikslu verta biliardo keturkampį atvaizduoti atžvilgiu tos kraštinės, kurią paliečia rutulys.

23. Atvaizduokite P kampo kraštinių atžvilgiu.

24. Remkitės 23 uždavinio sprendimu. Atsakymas — trikampis, kurio viršūnės sutampa su pradinio trikampio aukštinių pagrindais.

28. Įsidėmėkite, kad kiekvieną viršūnę turi atitikti jai simetriška viršūnė.

30. Tarę, kad uždavinys išspręstas, iš apskritimų centrų ir iš atkarpos, jungiančios šiuos centrus, vidurio taško nubrėžkite statmenis ieškomajai tiesei.

40. $\frac{360°}{n}$.

42. $\frac{1}{4} an \sqrt{4R^2-a^2}$.

43. $\frac{1}{2} anr$.

46. $\frac{n(n-3)}{2}$.

63. Iš pradžių išnagrinėkite atvejus, kai postūmio vektorius lygiagretus ir statmenas simetrijos ašiai.

64. Išsiaiškinkite, kas atsitinka simetrijos ašies taškams ir posūkio centrui, nuosekliai atliekant poslinkius.

65. Žr. nurodymą 4 uždaviniui.

68. Iš pradžių išspręskite uždavinį, kai $n=3$, 5, 7. Nagrinėdami, pavyzdžiui, penkiakampį, paimkite tris vienas po kito einančius taškus — ieškomojo penkiakampio viena po kitos einančių kraštinių vidurio taškus — ir trikampį, kurio viršūnės yra šiuose taškuose, papildykite iki lygiagretainio. Šio lygiagretainio viršūnė turi būti ieškomojo penkiakampio įstrižainės vidurio taškas.

71. Vieną taškų atvaizduokite tiesės atžvilgiu. Kas atsitiktų, jei po to kurį nors vieną tašką perstumtume kryptimi, lygiagrečia simetrijos ašiai, per vektorių, kurio ilgis lygus $|CD|$?

74. Žr. nurodymą 5 uždaviniui.

75. Žr. nurodymą 5 uždaviniui.

77. Žr. 4 uždavinį ir nurodymą, kaip jį spręsti.

81. Spręsdami šį uždavinį, galite remtis tokiu juokaujamu samprotavimu: norėdami apsirengti, mes iš pradžių apsivelkame marškinius, o paskui švarką, o norėdami nusirengti, pirmiausia nusivelkame švarką, o paskui marškinius. Taigi atvirkščius „poslinkius“ atliekame atvirkščia tvarka.

82. Pagalvokite, ar patenkinta grupės apibrėžimo a) sąlyga.

85. Pagalvokite, ar lygiagretieji postūmiai duotąja kryptimi tenkina grupės apibrėžimo b) sąlygą.

86. Išsiaiškinkite, kokį poslinkį apibrėžia kompozicija $S_l \circ S_l$.

88. Transformacijas $f \circ f$, $f \circ f \circ f$, $f \circ f \circ f \circ f$ parašykite dviejų eilučių lentelėmis.

Matematinės logikos elementai

5—11. Nubraižykite Oilerio—Veno diagramas, kurios iliustruotų atitinkamus samprotavimus.

20. Teiginio „Yra lyginių pirminių skaičių“ (šis teiginys teisingas) neiginiai „Nėra lyginių pirminių skaičių“ ir „Bet koks pirminis skaičius yra nelyginis“, reiškiantys vieną ir tą patį.

42. Teiginius „Kapitonas yra laive“, „Iš laivo iškraunamas krovinys“ ir „Vairininkas yra laive“ pažymėkite simboliais ir parašykite loginius reiškinius, atitinkančius instrukciją. Po to, taikydami tinkamus ekvivalentumus, juos suprastinkite. Šių prastinimų rezultatas — teiginys „Kai laivas neiškraunamas, vairininkas privalo būti kartu su kapitonu“.

43. Reikia formalizuoti sakinius, apibūdinančius draugų stebėjimus, ir gautą loginį reiškinį suprastinti.

44. Kiekvieną derinį parašykite kaip loginį reiškinį (pavyzdžiui, $R\check{Z}G$), visų tokių reiškinių disjunkciją suprastinkite, išanalizuokite reiškinį, gautą suprastinus.

45. Norint sudaryti loginį reiškinį, apibrėžtą teisingumo lentele, kurioje yra bent viena „T“, pakanka, kad ir koks būtų kintamųjų, kuriuos atitinka teisingo reiškinio reikšmė „T“, reikšmių rinkinys, sudaryti kintamųjų arba jų neiginių konjunkciją taip, kad su šiomis kintamųjų reikšmėmis ji būtų teisinga. Visų tokių konjunkcijų disjunkcija ir yra teisingas reiškinys.

47. Pažymėkite: A — „Išėjimas veda į laisvę", B — „Tu melagis". Paklausti reikia taip, kad piratas atsakytų „Taip" tada ir tik tada, kai išėjimas veda į laisvę. Sudarykite klausimo X teisingumo lentelę, imdami įvairias A ir B teisingumo reikšmių kombinacijas, sukonstruokite loginį reiškinį, atitinkantį lentelę, ir suprastinkite jį. Galimas klausimo X variantas — „Ar tiesa, kad šis išėjimas veda į laisvę tada ir tik tada, kai tu — melagis?"

48. Patikrinti galima įvairiais būdais. Galima, pavyzdžiui, remtis teisingumo lentelėmis, imant įvairias sudarančių teiginių teisingumo reikšmių kombinacijas. Galima taip pat taikyti „prieštaravimo" metodą.

59. Tinkamai pažymėję ir sudarę atitinkamą teisingumo lentelę, formalizuokite uždavinį. Po to sukonstruokite schemą.

63. Išspręskite atitinkamas lygtis.

82. Pakanka įrodyti, kad teiginio funkcijų, esančių ekvivalentumų kairėje ir dešinėje pusėse, teisingumo aibės sutampa. Pravartu pasinaudoti Oilerio—Veno diagramomis.

111. Kiekvieną nelygybę išreikškite paprastesnių nelygybių konjunkcija arba disjunkcija.

Koordinačių plokštumos aibės

7. Remkitės teorema, atvirkštine Pitagoro teoremai.

15. Įveskite tris kintamuosius: apskritimo centro koordinates ir nežinomą spindulį. Sudarykite trijų lygčių sistemą ir ją išspręskite.

20. Remkitės 19 uždavinio rezultatu.

25. Remkitės 23 ir 24 uždavinių rezultatais.

33. Kai apskritimas liečia abi koordinačių ašis, jo centras yra arba tiesėje $y=x$, arba tiesėje $y=-x$.

35. Tarkime, kad $M(x, y)$ — bet kuris ieškomosios aibės taškas. Parašykite sąlygą $\frac{AM}{BM}=\lambda$, suprastinkite ją. Įrodykite, kad gautoji lygtis — apskritimo lygtis.

36. Remkitės 35 uždavinio sprendimu.

40. Sakykime, kad $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, $M(x; y)$. Tuomet

$$d^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(x-x_3)^2+(y-y_3)^2.$$

Įrodykite, kad dydis d^2 yra minimaliausias, kai

$$x=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3),\quad y=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$$

(kiekviename kvadratiniame trinaryje išskirkite dvinario kvadratą). Lieka įrodyti, kad šios formulės apibrėžia trikampio ABC pusiaukraštinių susikirtimo tašką.

45. Išspręskite atitinkamas lygčių sistemas.

46. Reiškinį, esantį kairėje pusėje, jei tik reikia, išskaidykite dauginamaisiais. Remkitės sandaugos lygybės nuliui sąlyga.

47. Kiekviename trinaryje išskirkite dvinario kvadratą.

48. Tokių lygčių galima parašyti ne vieną. Galbūt paprasčiausia padaryti taip:

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}\cdot\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{2-y}=0.$$

53. Reikia lygčių sistemą išspręsti kintamųjų x ir y atžvilgiu.

55. Parašoma atitinkamos tiesės arba apskritimo lygtis, o paskui taikomos formulės, kurios apibrėžia inversiją apskritimo atžvilgiu. Reikia remtis 51 uždavinio rezultatu.

57. Taikydami visas tris lygtis, eliminuokite x ir y.

61. Remkitės 60 uždavinio sprendimo rezultatu.

66. Sudarykite atitinkamos taškų aibės lygtį.

74. Remkitės 73 uždavinio rezultatu.

80. Braižydami a)—h) grafikus, pradėkite braižyti nuo „giliausio“ modulio, nuosekliai panaikindami modulio ženklus. Pavyzdžiui, norėdami nubraižyti grafiką $y=||x-1|-1|$, nuosekliai braižome grafikus $y=x-1$; $y=|x-1|$; $y=|x-1|-1$; $y=||x-1|-1|$.

81. Išnagrinėkite, kokios funkcijos — lyginės ar nelyginės. Atkreipkite dėmesį į tai, kad paskutinieji keturi grafikai gaunami iš lyginių funkcijų grafikų postūmiu per 2 vienetus į dešinę.

82. Braižydami šiuos grafikus, nuosekliai išnagrinėkite abscisių ašies atkarpas, kuriose reiškiniai, esantys po modulio ženklu, nekeičia ženklo. Tuomet galima panaikinti modulio ženklus.

Begalinės aibės

14. Kiekvienam taškui priskirkite apskritimą, kurio centras šiame taške ir spindulys 1.

15. Kiekvienam teigiamam skaičiui priskirkite apskritimą, kurio centras koordinačių pradžioje, o spindulys lygus šiam skaičiui.

18. Spręsdami j) uždavinį, įsidėmėkite, kad „aštuoniukės“ kiekvieno „nulio“ viduje galima parinkti tašką, kurio koordinatės būtų racionalios, be to, skirtingas aštuoniukes negali atitikti tie patys taškai.

19. Remkitės 16 uždavinio sprendimu.

21. Įrodykite tokiu pat būdu, kaip įrodyta tekste.

25. Remkitės tuo, kad $0{,}9999\ldots=1$.

27. Iš pradžių išnagrinėkite aibę tų taškų, kurių dešimtainio užrašo vienas pirmasis skaičius nelygus 5.

29. Vienas galimų variantų — iš skritulio ir kvadrato centrų nubrėžti kokius tik įmanoma „spindulius“ ir nustatyti atitiktį tarp „vienodų“ spindulių taškų aibių.

30. Kiekvieną kubo tašką galima apibrėžti teigiamų skaičių trejetu. Pagalvokite, kaip reikia sumaišyti kiekvieno skaičiaus skaitmenis, kad gautume vieną skaičių, be to, kad skirtingus trejetus atitiktų skirtingi skaičiai.

TURINYS

Naumas Vilenkinas, Rafailas Guteris, Aleksandras Zemliakovas, Ina Nikolskaja
RINKTINIAI MATEMATIKOS KLAUSIMAI
Fakultatyvinis kursas VII—VIII kl.
Sudarė *O. Bokovnevas, S. Švarcburdas*

Redaktorė *J. Jašinskienė*
Viršelis *P. Markevičiaus*. Men. redaktorius *V. Oržekauskas*
Techn. redaktorė *N. Kasenkovienė*. Korektorė *M. Valantienė*
Vertimą recenzavo *Juozas Mačys*

Наум Яковлевич Виленкин, Рафаил Самойлович Гутер,
Александр Николаевич Земляков, Инна Львовна Никольская
ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ
Факультативный курс, VII—VIII кл.
Составители: *О. А. Боковнев, С. И. Шварцбурд*
Оригинал под ред. *В. В. Фирсова*
Перевел с русского *Видмантас Пекарскас*
Оригинал рекомендован Главным управлением школ Министерства просвещения СССР
На литовском языке
Литовская ССР, 233000, Каунас, пр. Ленина, 25, издательство «Швиеса»
ИБ № 1084

Duota rinkti 1982.01.18. Pasirašyta spausdinti 1982.07.30. Formatas 60×90[1]/16, popierius spaudos Nr. 2, literatūrinė garnitūra, iškilioji spauda, 1 spalva. 11,75 sąl. sp. lnk., 11,63 leid. lnk. Tiražas 10 000 egz. Užsakymo Nr. 124. Leid. Nr. 9253.
Kaina 40 kap.

Leidykla „Šviesa", 233000 Kaunas, Lenino pr. 25
V. Kapsuko-Mickevičiaus spaustuvė, 233000 Kaunas, Lenino pr. 23